Avances en Ciencias e Ingeniería - ISSN: 0718-8706
Av. cien. ing.: 11(3), 81-107 (Julio/Septiembre, 2020)

CUADRADOS SUPERMÁGICOS DE TAMAÑO CUATRO

SUPERMAGIC SQUARES OF SIZE FOUR

Vicente F. Molina-Padrón[1]
(1) Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Facultad de Matemática, Física y Computación,
Carretera a Camajuaní Km. 5 ½, Santa Clara, Villa Clara – Cuba
(e-mail: vfmolina@uclv.edu.cu)

Recibido: 12/05/2020 - Evaluado: 11/06/2020 - Aceptado: 26/06/2020

RESUMEN

El objetivo del trabajo es obtener todos los cuadrados mágicos de tamaño cuatro a partir de un Modelo de Optimización; en el que, además de las restricciones tradicionales (sumas por filas, columnas y diagonales), se tengan en cuenta otras restricciones relacionadas con cuatro submatrices 2 x 2, en las que puede dividirse el cuadrado. Se demuestra que estas restricciones están implícitas en las tradicionales; por lo que todos los cuadrados de tamaño cuatro pueden clasificarse como supermágicos. Se representa el problema mediante un Modelo de Programación Lineal en Enteros con soluciones múltiples; que, al ser resuelto con ayuda del software LINGO, permitió encontrar los 880 cuadrados que cumplen tales restricciones. La forma como son presentados los cuadrados facilita que puedan ser localizados a partir de características referidas a la posición del número 1. Quedan ordenadas las combinaciones con el 1, para cualquier fila, en las que no existen estos cuadrados.

ABSTRACT

The aim of this paper is to obtain all magic squares of size four, by using an Optimization Model where, in addition to the traditional restrictions (sums for rows, columns and diagonals), other restrictions related to four 2 x 2 submatrices, into which the square can be divided, are taken into account. It is shown that these additional restrictions are included in the traditional ones; therefore, all squares of size four could be classified as supermagic. The problem is represented by means of a Linear Programming Model in Integers with multiple solutions; which, when solved with the help of LINGO software, allowed to find the 880 squares that meet such restrictions. The way squares are presented makes it easy to locate them from characteristics referred to the position of number one. The different combinations for number one in any row for which these squares do not exist, are ordered.

Palabras Clave: LINGO, cuadrado mágico 4 x 4, modelo de optimización, propiedades de simetría
Keywords: LINGO, magic square 4 x 4, optimization model, symmetry properties

INTRODUCCIÓN

Un cuadrado mágico de orden n es una matriz formada por n filas y n columnas, en las que se escriben los n^2 primeros números naturales; de modo que sea constante la suma de los números de cualquier fila, cualquier columna y cualquiera de las dos diagonales.

Los cuadrados mágicos han estado presentes en todas las épocas y culturas del conocimiento humano, han sido objeto de veneración religiosa, se han utilizado como elementos mágicos y místicos, han merecido un lugar destacado en diversas manifestaciones artísticas e industriales y han despertado el interés entre los más ilustres matemáticos a lo largo de la historia (Esquerra, 2009). La literatura recoge la historia de muchos cuadrados mágicos que han sido famosos por diferentes razones, entre los que destacan el que se muestra en la Figura 1. Según Esquerra (2009) y Stephens (1993), la imagen forma parte de un grabado en cobre titulado *Melancolía*, de Alberto Durero, que muestra un cuadrado mágico en el cual aparece la fecha de fallecimiento de su esposa: día 4 del año 1514, mes 1 (enero). En este cuadrado existen varias combinaciones de cuatro números, cuya suma es 34. Las más llamativas –porque en todos los casos hay dos parejas que suman 17– son: los números de las esquinas, los cuatro números centrales, los dos números centrales de las filas primera y última y los dos números centrales de las columnas primera y última. ¿Es esta "súper magia" un atributo particular de este cuadrado mágico, o es posible que otros también la cumplan?

Fig. 1: Cuadrado mágico del grabado *Melancolía* (Esquerra, 2009).

El número de cuadrados mágicos crece considerablemente al aumentar el orden y no existe una fórmula general conocida para calcular el número total de cuadrados mágicos de un orden dado. Sin embargo, para los órdenes más pequeños que 6, ha sido calculado el número de cuadrados mágicos. Existe un único cuadrado mágico, salvo simetrías y rotaciones, de orden tres; 880 cuadrados mágicos de orden cuatro y 275 305 224 cuadrados mágicos de orden cinco (Croy *et al.*, 2016).

Encontrar todos los cuadrados mágicos de orden n es un problema de búsqueda, en el espacio combinatorio de $n^2!$; no obstante, la construcción de un cuadrado mágico es simple para cualquier valor de n, porque hay métodos que crean una solución determinista para cada n. Existen diferentes métodos generales de construcción de cuadrados mágicos; cada uno para tipos específicos: orden impar, orden 4k u orden (4k + 2). A partir de estos pueden obtenerse otros cuadrados por diferentes formas de rotación y reflexión. Sin embargo, cuando n aumenta, el número de cuadrados que no pueden obtenerse, utilizando estos algoritmos, crece considerablemente. Por tanto, el problema de encontrar todos los cuadrados mágicos de un mismo orden, no solo los proporcionados por esas soluciones deterministas, es un desafío para cualquier método de búsqueda.

En la literatura se reflejan diferentes tendencias. Berlekamp *et al.* (1982), describen un método para generar los cuadrados mágicos de orden cuatro, a partir de diferentes operaciones de intercambio de sus elementos. Kim & Yoo (2008), definen una operación producto en el conjunto de las matrices de enteros, que es utilizada en un algoritmo para construir una familia de cuadrados mágicos y demuestran que este conjunto forma un monoide. Velázquez (2004), analiza el problema a partir de las características que conjugan elementos del Álgebra y la Geometría y describe cualquier cuadrado mágico de suma *s* como una variedad lineal del espacio vectorial de cuadrados mágicos de suma cero. También se han desarrollado métodos heurísticos, como el propuesto por Fonseca & Grandchamp

(2012), quienes presentan un algoritmo de dos fases; en la primera se construye un cuadrado seudo mágico que es utilizado en la segunda fase para, a través de otra heurística, encontrar un cuadrado mágico.

No se han encontrado investigaciones en las que se vinculen los cuadrados mágicos con modelos de optimización, de ahí que el objetivo del presente trabajo es obtener todos los cuadrados mágicos de tamaño cuatro a partir de un Modelo de Optimización; en el que, además de las restricciones tradicionales (sumas por filas, columnas y diagonales), se tengan en cuenta otras restricciones relacionadas con cuatro submatrices 2 x 2, en las que puede dividirse el cuadrado (las que fueron analizadas en la Figura 1).

METODOLOGÍA

El proceso de búsqueda de un cuadrado mágico de tamaño *n* se puede modelar de la siguiente forma:

Sea $k = \frac{\sum_{i=1}^{n^2} i}{n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Hallar $X(i,j) = \overline{1,n^2}$; $X(i,j) \neq X(k,l),\ \forall (i,j) \neq (k,l)$; $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$, tales que:

$$\sum_{j=1}^{n} X(i,j) = k\ , i = \overline{1,n}\ ; \quad \sum_{i=1}^{n} X(i,j) = k\ , j = \overline{1,n}\ ; \quad \sum_{i=1}^{n} X(i,i) = k\ ; \quad \sum_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=n+1-i}} X(i,j) = k;$$

A *k* se le llama "constante mágica". Las restricciones representan la suma de los elementos de cada fila, de cada columna, de la diagonal principal y de la diagonal inversa, respectivamente.

Para el caso de *n* = 4, *k* = 34 y deben cumplirse las restricciones siguientes:

x(1,1)+x(1,2)+x(1,3)+x(1,4) = 34; (1)
x(2,1)+x(2,2)+x(2,3)+x(2,4) = 34; (2)
x(3,1)+x(3,2)+x(3,3)+x(3,4) = 34; (3)
x(4,1)+x(4,2)+x(4,3)+x(4,4) = 34; (4)
x(1,1)+x(2,1)+x(3,1)+x(4,1) = 34; (5)
x(1,2)+x(2,2)+x(3,2)+x(4,2) = 34; (6)
x(1,3)+x(2,3)+x(3,3)+x(4,3) = 34; (7)
x(1,4)+x(2,4)+x(3,4)+x(4,4) = 34; (8)
x(1,1)+x(2,2)+x(3,3)+x(4,4) = 34; (9)
x(4,1)+x(3,2)+x(2,3)+x(1,4) = 34; (10)

A continuación, se demuestra que, de las restricciones tradicionales representadas por las ecuaciones (1) - (10), también se obtiene la constante mágica (34) en las cuatro submatrices 2 x 2 en las que puede dividirse el cuadrado y que fueron detalladas en el análisis de la Figura 1.

De (1) y (4), se obtiene:
[x(1,1)+x(1,4)+x(4,1)+x(4,4)] + [x(1,2)+x(1,3)+x(4,2)+x(4,3)] = 68; (11)
De (2) y (3), se obtiene:
[x(2,1)+x(2,4)+x(3,1)+x(3,4)] + [x(2,2)+x(2,3)+x(3,2)+x(3,3)] = 68; (12)
De (5) y (8), se obtiene:
[x(1,1)+x(1,4)+x(4,1)+x(4,4)] + [x(2,1)+x(2,4)+x(3,1)+x(3,4)] = 68; (13)
De (6) y (7), se obtiene:
[x(1,2)+x(1,3)+x(4,2)+x(4,3)] + [x(2,2)+x(2,3)+x(3,2)+x(3,3)] = 68; (14)
De (9) y (10), se obtiene:
[x(1,1)+x(1,4)+x(4,1)+x(4,4)] + [x(2,2)+x(2,3)+x(3,2)+x(3,3)] = 68; (15)
De (11) y (13), se obtiene:
x(1,2)+x(1,3)+x(4,2)+x(4,3) = x(2,1)+x(2,4)+x(3,1)+x(3,4)

De (11) y (14), se obtiene:

$$x(1,1)+x(1,4)+x(4,1)+x(4,4) = x(2,2)+x(2,3)+x(3,2)+x(3,3)$$

De (11) y (15), se obtiene:

$$x(1,2)+x(1,3)+x(4,2)+x(4,3) = x(2,2)+x(2,3)+x(3,2)+x(3,3)$$

Esto demuestra que las siguientes cuatro sumas son iguales entre sí:

$$x(1,1)+x(1,4)+x(4,1)+x(4,4) = x(2,2)+x(2,3)+x(3,2)+x(3,3) = x(2,1)+x(2,4)+x(3,1)+x(3,4) = x(1,2)+x(1,3)+x(4,2)+x(4,3)$$

Sustituyendo las parejas correspondientes en las ecuaciones (11) y (12), se obtiene:

$$x(1,1)+x(1,4)+x(4,1)+x(4,4) = 34; \qquad x(2,1)+x(2,4)+x(3,1)+x(3,4) = 34,$$
$$x(2,2)+x(2,3)+x(3,2)+x(3,3) = 34; \qquad x(1,2)+x(1,3)+x(4,2)+x(4,3) = 34,$$

O sea, para n = 4, al considerar solamente las 10 restricciones requeridas para obtener un cuadrado mágico, cualquier solución que se obtenga es a su vez un "cuadrado supermágico" que cumple las otras cuatro restricciones. Esto indica que el hecho de que sean iguales a 34 las cuatro sumas analizadas en la Figura 1 no es un atributo particular de ese cuadrado mágico, sino que lo es de todos los cuadrados mágicos de orden cuatro.

A partir de un cuadrado de tamaño cuatro se pueden obtener otros siete, realizando rotaciones y reflexiones, que mantienen invariantes las sumas indicadas en las ecuaciones (1)-(10). Esto puede apreciarse en la Tabla 1.

Tabla 1: Cuadrados de orden cuatro, simétricos entre sí.

a	b	c	d	d	c	b	**a**	p	o	n	m	m	n	o	p
e	f	g	h	h	g	f	e	l	k	j	i	i	j	k	l
i	j	k	l	l	k	j	i	h	g	f	e	e	f	g	h
m	n	o	p	p	o	n	m	d	c	b	**a**	**a**	b	c	d
a	e	i	m	m	i	e	**a**	p	l	h	d	d	h	l	p
b	f	j	n	n	j	f	b	o	k	g	c	c	g	k	o
c	g	k	o	o	k	g	c	n	j	f	b	b	f	j	n
d	h	l	p	p	l	h	d	m	i	e	**a**	**a**	e	i	m

Por otra parte, todos los cuadrados de orden cuatro asimétricos entre sí se pueden dividir en tres grupos:

A. Los que tienen el 1 en un vértice: posiciones representadas por las letras a, d, m y p en la Tabla 1.
B. Los que tienen el 1 al lado de un vértice: posiciones representadas por las letras b, c, e, h, i, l, n y o.
C. Los que tienen el 1 al lado del centro: posiciones representadas por las letras f, g, j y k.

Se puede, entonces, dividir el problema "buscar todos los cuadrados supermágicos de tamaño cuatro", en tres subproblemas:

1. Buscar los Cuadrados con valor **1** en x(1,1).
2. Buscar los Cuadrados con valor **1** en x(1,2).
3. Buscar los Cuadrados con valor **1** en x(2,2).

Una vez obtenidos todos los cuadrados de cada uno de estos subgrupos, al aplicar las siete transformaciones descritas en la Tabla 1, se obtienen todos los cuadrados supermágicos de tamaño cuatro.

En cada caso, el objetivo es encontrar los cuadrados con el número 1 en la posición indicada. Esto se puede lograr planteando un modelo de optimización cuyo objetivo sea minimizar la posición deseada para el 1; por ejemplo: minimizar x(1,1), con las restricciones (1)-(10) y todas las variables enteras y diferentes, tomando valores en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 16\}$. Dado el volumen de cuadrados existentes, se requiere utilizar una herramienta informática. Para ello se utilizó el software de optimización LINGO (2018); que, en su versión más simple, Demo/Web, admite hasta 30 variables enteras y 150 restricciones.

Para el subproblema 1, el modelo queda de la forma:

```
Model:
    Sets:
      side;
      sxs( side, side): x;
    endsets
    data:
      side = 1..4;
    enddata
          min = x(1,1);
    x(1,1)+x(1,2)+x(1,3)+x(1,4)=34;    x(2,1)+x(2,2)+x(2,3)+x(2,4)=34;    x(3,1)+x(3,2)+x(3,3)+x(3,4)=34;
    x(4,1)+x(4,2)+x(4,3)+x(4,4)=34;    x(1,1)+x(2,1)+x(3,1)+x(4,1)=34;    x(1,2)+x(2,2)+x(3,2)+x(4,2)=34;
    x(1,3)+x(2,3)+x(3,3)+x(4,3)=34;    x(1,4)+x(2,4)+x(3,4)+x(4,4)=34;    x(1,1)+x(2,2)+x(3,3)+x(4,4)=34;
    x(4,1)+x(3,2)+x(2,3)+x(1,4)=34;
    @for( sxs(i, j) :
      @bnd( 1, x(i, j), 16);     );
      @for( sxs(i, j) | 1 #le# i #and# i #le# 4 #and# 1 #le# j #and# j #le# 4:
          @alldiff('blk' + side(1) + side(1), x(i, j) );    );
    procedure hline( m):
    k = 4*(m + 1)+1; @write( 4*' ', k*'.', @newline( 1)  );
    endprocedure
    calc:
      @set( 'terseo', 1);      @solve();
      @write(@newline(1), 4*' ', 'Solución del Cuadrado Supermágico',    @newline(1));    hline( 4);
      @for( side( i):
          @write( '    .');
          @for( side( j):
              @write( @format( '3g', x( i, j)));    @write( ' .');              );
          @write( @newline( 1));    hline( 4);        );       @write( @newline( 3));
    endcalc
end
```

Como se muestra en la Figura 2, LINGO identifica el problema como PILP (Programación Lineal en Entero Puro, por sus siglas en inglés); por lo que emplea la técnica B-and-B (Ramificación y Acotamiento, por sus siglas en inglés) para encontrar la solución.

Fig. 2: Reporte de LINGO con datos generales sobre el modelo resuelto.

La idea básica en la que se apoya la técnica de ramificación y acotamiento es *divide y conquistarás* (Hillier & Lieberman, 2010). Como es complejo resolver en forma directa el problema original "grande", se divide en subproblemas cada vez más pequeños hasta que estos se puedan vencer. La división (*ramificación*) se hace mediante una partición del conjunto completo de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños. En parte, la conquista (*sondeo*) se hace mediante el *acotamiento* de la mejor solución del subconjunto, para después descartar los subconjuntos cuya cota indique que no es posible que contenga una solución óptima para el problema original.

En el caso de existir soluciones múltiples, como sucede en este problema, el orden en que se introducen las restricciones influye en la solución óptima a la que se llega. Por ejemplo, en la Figura 3 se presenta la solución obtenida al introducir las restricciones en el orden (1),..., (10). Al introducir las restricciones en el orden inverso se obtuvo la solución que se presenta en la Figura 4.

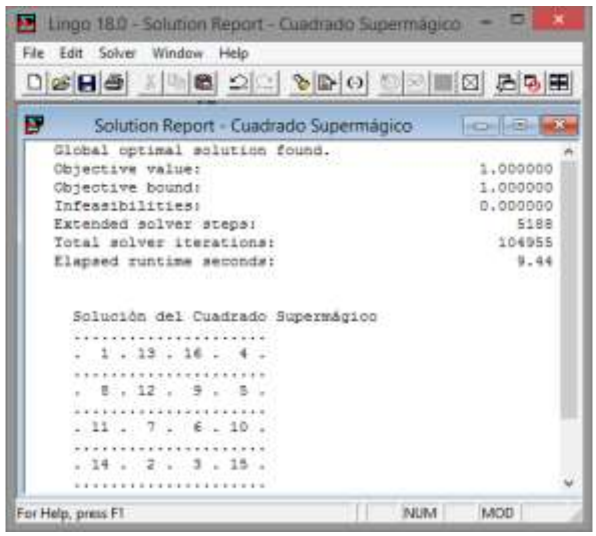

Fig. 3: Solución obtenida para el caso min = x(1,1), con las restricciones (1),..., (10).

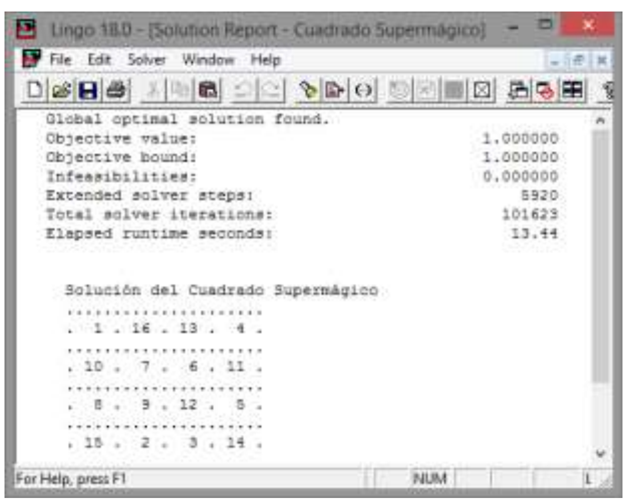

Fig. 4: Solución obtenida para el caso min = x(1,1), con las restricciones (10),..., (1)

Colocando las restricciones con números impares primero y luego las pares, se obtuvo la solución que se muestra en la Figura 5.

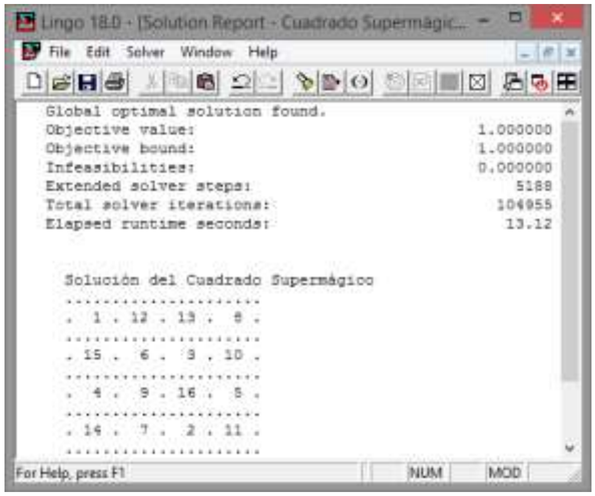

Fig. 5: Solución obtenida para min = x(1,1), con las restricciones (1), (3), … (9), (2), …, (10)

En este caso, la primera columna tiene un número menor (4) que los de la primera fila. Siempre que ocurra esto, al igual que en el subproblema 3, se toma como solución al modelo el cuadrado simétrico respecto a la diagonal principal; es decir, esta solución se toma como el cuadrado que se muestra a la derecha en la Tabla 2. Este caso, en los análisis que se describen más adelante, se cuantifica como un cuadrado que tiene la combinación 1-15-4-14 en la primera fila y la combinación 1-12-13-8 en la primera columna.

Tabla 2: Dos cuadrados simétricos

1	12	13	18	**1**	15	4	14
15	6	3	10	12	6	9	7
4	9	16	5	13	3	16	2
14	7	2	11	8	10	5	11

Como se puede apreciar en las Figuras 3, 4 y 5, el tiempo que requiere el software para hallar una solución es de apenas 13 segundos. Un poco más demorado resulta buscar todas las permutaciones, relativas al orden de introducir las restricciones, para obtener nuevas soluciones; pero con paciencia y organización es posible obtener múltiples soluciones. Por otra parte, algunas soluciones se pueden "forzar" asignándoles los valores deseados a algunas variables y verificando si existe solución factible.

Al observar las soluciones de las Figuras 3 y 4, en las que se tienen las combinaciones 1-13-16-4 y 1-16-13-4, resulta de interés conocer si existe solución para otras combinaciones de estos valores; por ejemplo 1-4-13-16 o 1-4-16-13. Tomando el orden de las restricciones (1),…, (10), al asignar a la variable x(1,2) el valor 4, se obtuvo la solución de la Figura 6. Al asignar, además, a x(1,3) el valor 13, se obtuvo la solución que se muestra en la Figura 7.

Al analizar de conjunto estas cuatro soluciones (Figuras 3, 4, 6 y 7) se trató de "deducir" otras. Se mantuvo, en las soluciones mostradas en las Figuras 6 y 7, los valores extremos y se intercambiaron los del centro; tal y como sucede en las soluciones mostradas en las Figuras 3 y 4. La Tabla 3 agrupa las seis soluciones descritas.

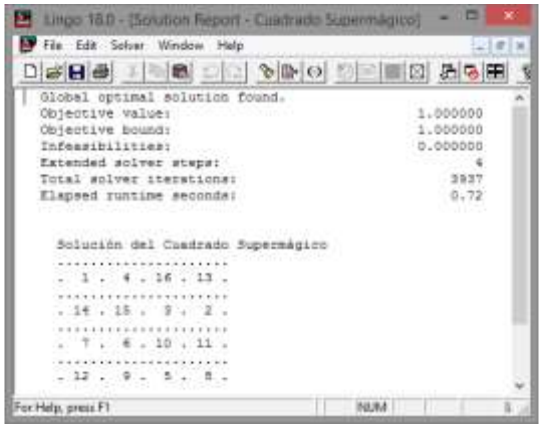

Fig. 6: Solución obtenida para el caso min = x(1,1), con las restricciones (1),…, (10) y x(1,2)=4.

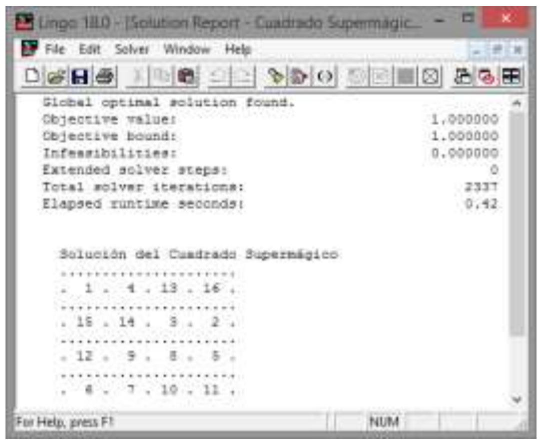

Fig. 7: Solución obtenida para el caso min = x(1,1), con las restricciones (1),…, (10), x(1,2)=4 y x(1,3)=13.

Tabla 3: Seis soluciones obtenidas para la combinación de números 4, 13 y 16.

1	13	16	4	1	16	13	4	1	4	16	13	1	16	4	13	1	4	13	16	1	13	4	16
8	12	9	5	10	7	6	11	14	15	3	2	6	11	7	10	15	14	3	2	8	12	5	9
11	7	6	10	8	9	12	5	7	6	10	11	15	2	14	3	12	9	8	5	14	2	15	3
14	2	3	15	15	2	3	14	12	9	5	8	12	5	9	8	6	7	10	11	11	7	10	6

En cada caso se analizó si era posible obtener otra solución diferente que mantuviera la primera fila. Cada solución obtenida se comparó con las otras para detectar "semejanzas" y "diferencias" y "trasladar esas conclusiones" a los cuadrados de las otras combinaciones de la primera fila y comprobar si también se obtienen soluciones en esos casos. En la Tabla 4 se presentan todos los cuadrados que se obtuvieron para las seis combinaciones diferentes de los números 4-13-16 y el 1 en la posición x(1,1). Como se observa, existe la misma cantidad de cuadrados en cada una de las parejas de combinaciones del tipo 1-b-c-d y las del tipo 1-c-b-d. Además, en cada caso coinciden las combinaciones de números de las primeras columnas, aunque no siempre en el mismo orden.

Un proceso semejante se realizó con las otras combinaciones de tres números diferentes, entre 2 y 16 con suma 33, que podían acompañar al 1 en su fila, en cada uno de los subproblemas.

Tabla 4: Cuadrados supermágicos obtenidos con los números 4, 13 y 16 en la primera fila.

1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13	16
8	15	2	9	12	14	3	5	12	15	2	5	14	15	2	3	14	15	2	3	15	14	3	2
14	5	12	3	15	9	8	2	14	9	8	3	8	5	12	9	12	9	8	5	12	9	8	5
11	10	7	6	6	7	10	11	7	6	11	10	11	10	7	6	7	6	11	10	6	7	10	11
1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16
8	12	5	9	12	8	9	5	12	8	9	5	14	12	5	3	14	8	9	3	15	8	9	2
14	2	15	3	15	3	14	2	14	2	15	3	8	2	15	9	12	2	15	5	12	3	14	5
11	7	10	6	6	10	7	11	7	11	6	10	11	7	10	6	7	11	6	10	6	10	7	11
1	4	16	13	1	4	16	13	1	4	16	13	1	4	16	13								
14	15	3	2	15	14	2	3	14	15	3	2	15	14	2	3								
11	10	6	7	6	7	11	10	7	6	10	11	10	11	7	6								
8	5	9	12	12	9	5	8	12	9	5	8	8	5	9	12								
1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4	13								
11	6	10	7	6	11	7	10	7	10	6	11	10	7	11	6								
14	3	15	2	15	2	14	3	14	3	15	2	15	2	14	3								
8	9	5	12	12	5	9	8	12	5	9	8	8	9	5	12								
1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4
8	12	9	5	6	10	7	11	12	8	5	9	8	12	9	5	12	8	5	9	12	10	7	5
11	7	6	10	12	8	9	5	7	11	10	6	10	6	7	11	6	10	11	7	6	8	9	11
14	2	3	15	15	3	2	14	14	2	3	15	15	3	2	14	15	3	2	14	15	3	2	14
1	16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	4
11	6	7	10	6	11	10	7	7	10	11	6	10	7	6	11	6	9	8	11	12	9	8	5
8	9	12	5	12	5	8	9	12	5	8	9	8	9	12	5	12	7	10	5	6	7	10	11
14	3	2	15	15	2	3	14	14	3	2	15	15	2	3	14	15	2	3	14	15	2	3	14

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Subproblema 1

De las 114 combinaciones posibles, para 44 de ellas el software detectó que no existe solución factible. Estas combinaciones se muestran en la Tabla 5. La Tabla 6 hace referencia a los cuadrados en los que las combinaciones dadas aparecen en la primera columna.

Tabla 5: Combinaciones de valores de la primera fila, para las que no existen cuadrados mágicos

1	15	16	2	1	5	13	15	1	6	13	14	1	7	11	15	1	9	10	14	1	9	11	13	1	10	11	12
1	16	15	2	1	13	5	15	1	13	6	14	1	11	7	15	1	10	9	14	1	11	9	13	1	11	10	12
1	14	16	3	1	5	15	13	1	6	14	13	1	7	15	11	1	9	14	10	1	9	13	11	1	10	12	11
1	16	14	3	1	15	5	13	1	14	6	13	1	15	7	11	1	14	9	10	1	13	9	11	1	12	10	11
1	12	16	5	1	13	15	5	1	13	14	6	1	11	15	7	1	10	14	9	1	11	13	9	1	11	12	10
1	16	12	5	1	15	13	5	1	14	13	6	1	15	11	7	1	14	10	9	1	13	11	9	1	12	11	10
												1	8	16	9												
												1	16	8	9												

En la Tabla 7 se presentan las 70 combinaciones para las que se obtuvo solución. Estas aparecen ordenadas sobre la base de los tres números que acompañan al 1. En cada caso se indica: la cantidad de cuadrados diferentes en los que dicha combinación aparece en la primera fila (F), la cantidad en la que aparece en la primera columna (C) y la suma de ambas (S). Se puede observar que, en todos los casos, coinciden la cantidad de cuadrados de las combinaciones de las formas: 1-**b-c**-d y 1-**c-b**-d; es decir, las que intercambian los elementos centrales.

Tabla 6: Combinaciones que aparecen en la 1ª columna, en cuadrados con un número menor en la 1ª fila.

No.	Combinación				T	Combinaciones en la 1ª fila
1	1	5	12	16	2	1 14 15 4 - 1 15 14 4
2	1	12	5	16	2	1 14 15 4 - 1 15 14 4
3	1	6	11	16	2	1 14 15 4 - 1 15 14 4
4	1	11	6	16	2	1 14 15 4 - 1 15 14 4
5	1	6	16	11	1	1 15 4 14
6	1	16	6	11	1	1 4 15 14
7	1	11	16	6	1	1 14 4 15
8	1	16	11	6	1	1 4 14 15
9	1	6	12	15	3	1 13 16 4 - 1 16 13 4 - 1 16 13 4
10	1	12	6	15	3	1 13 16 4 - 1 13 16 4 - 1 16 13 4
11	1	6	15	12	1	1 16 4 13
12	1	15	6	12	1	1 4 16 13
13	1	12	15	6	4	1 3 14 16 - 1 14 3 16 - 1 4 13 16 - 1 13 4 16
14	1	15	12	6	4	1 3 14 16 - 1 14 3 16 - 1 4 13 16 - 1 13 4 16
15	1	7	10	16	8	1 12 15 6 - 1 12 15 6 - 1 15 12 6 -1 15 12 6 - 1 14 15 4 -1 14 15 4 -1 15 14 4 -1 15 14 4
16	1	10	7	16	8	1 12 15 6 - 1 12 15 6 - 1 15 12 6 -1 15 12 6 - 1 14 15 4 -1 14 15 4 -1 15 14 4 -1 15 14 4
17	1	7	16	10	2	1 14 4 15 - 1 12 6 15
18	1	16	7	10	2	1 4 14 15 - 1 6 12 15
19	1	10	16	7	2	1 15 4 14 - 1 15 6 12
20	1	16	10	7	2	1 4 15 14 - 1 6 15 12
21	1	7	12	14	2	1 16 13 4 - 1 16 6 11
22	1	12	7	14	2	1 13 16 4 - 1 6 16 11
23	1	7	14	12	4	1 6 11 16 - 1 11 6 16 - 1 16 11 6 - 1 16 4 13
24	1	14	7	12	4	1 6 11 16 - 1 11 6 16 - 1 11 16 6 - 1 4 16 13
25	1	12	14	7	4	1 4 13 16 - 1 13 4 16 - 1 6 11 16 - 1 11 6 16
26	1	14	12	7	4	1 4 13 16 - 1 13 4 16 - 1 6 11 16 - 1 11 6 16
27	1	8	9	16	2	1 7 14 12 - 1 14 7 12
28	1	9	8	16	2	1 7 14 12 - 1 14 7 12
29	1	9	16	8	5	1 4 14 15 - 1 4 15 14 - 1 14 4 15 - 1 15 4 14 - 1 7 14 12
30	1	16	9	8	5	1 4 14 15 - 1 4 15 14 - 1 14 4 15 - 1 15 4 14 - 1 14 7 12
31	1	8	10	15	6	1 5 16 12 - 1 16 5 12 - 1 11 16 6 - 1 13 16 4 - 1 12 7 14 - 1 14 7 12
32	1	10	8	15	6	1 5 16 12 - 1 16 5 12 - 1 16 11 6 - 1 16 13 4 - 1 7 12 14 - 1 7 14 12
33	1	8	15	10	6	1 4 13 16 - 1 13 4 16 - 1 6 11 16 - 1 11 6 16 - 1 12 14 7 - 1 14 12 7
34	1	15	8	10	6	1 4 13 16 - 1 13 4 16 - 1 6 11 16 - 1 11 6 16 - 1 12 14 7 - 1 14 12 7
35	1	10	15	8	10	1 3 14 16- 114 3 16-116413-15 12 16-15 16 12-112 5 16-116 5 12-116 6 11-17 12 14-171412
36	1	15	10	8	10	1 3 14 16- 114 3 16-141613-15 12 16-15 16 12-112 5 16-1 16 5 12-16 16 11-112714-114712
37	1	8	11	14	4	1 13 16 4 - 1 12 6 15 - 1 15 6 12 - 1 10 16 7
38	1	11	8	14	4	1 16 13 4 - 1 6 12 15 - 1 6 15 12 - 1 16 10 7
39	1	8	14	11	6	1 4 13 16 - 1 7 10 16 - 1 10 7 16 - 1 12 15 6 - 1 13 4 16 - 1 15 12 6
40	1	14	8	11	6	1 4 13 16 - 1 7 10 16 - 1 10 7 16 - 1 12 15 6 - 1 13 4 16 - 1 15 12 6
41	1	11	14	8	6	1 16 4 13 - 1 6 12 15 - 1 6 15 12 - 1 7 16 10 - 1 16 7 10 - 1 16 7 10
42	1	14	11	8	6	1 4 16 13 - 1 12 6 15 - 1 15 6 12 - 1 7 16 10 - 1 7 16 10 - 1 16 7 10
43	1	8	12	13	6	1 14 15 4 - 1 15 14 4 - 1 6 11 16 - 1 11 6 16 - 1 7 10 16 - 1 10 7 16
44	1	12	8	13	6	1 14 15 4 - 1 15 14 4 - 1 6 11 16 - 1 11 6 16 - 1 7 10 16 - 1 10 7 16
45	1	8	13	12	6	1 3 16 14 - 1 16 3 14 - 1 14 4 15 - 1 15 4 14 - 1 11 16 6 - 1 10 16 7
46	1	13	8	12	6	1 3 16 14 - 1 16 3 14 - 1 4 14 15 - 1 4 15 14 - 1 16 11 6 - 1 16 10 7
47	1	12	13	8	11	1 2 15 16 - 1 15 2 16 - 1 16 2 15 - 1 3 16 14 - 1 16 3 14 - 1 14 4 15 - 1 15 4 14 - 1 6 11 16 - 1 6 16 11 - 1 11 6 16 - 1 7 16 10
48	1	13	12	8	11	1 2 15 16 - 1 2 16 15 - 1 15 2 16 - 1 3 16 14 - 1 16 3 14 - 1 4 14 15 - 1 4 15 14 - 1 6 11 16 - 1 11 6 16 - 1 16 6 11 - 1 16 7 10

Tabla 7: Combinaciones de números para las que se obtiene solución al subproblema 1.

Combinación				F	C	S	Combinación				F	C	S	Combinación				F	C	S	Combinación				F	C	S
1	2	15	16	2	0	2	**1**	14	15	4	10	0	10	**1**	7	10	16	4	8	12	**1**	8	15	10	0	6	6
1	15	2	16	2	0	2	**1**	15	14	4	10	0	10	**1**	10	7	16	4	8	12	**1**	15	8	10	0	6	6
1	2	16	15	1	0	1	**1**	5	12	16	2	2	4	**1**	7	16	10	4	2	6	**1**	10	15	8	0	10	10
1	16	2	15	1	0	1	**1**	12	5	16	2	2	4	**1**	16	7	10	4	2	6	**1**	15	10	8	0	10	10
1	3	14	16	4	0	4	**1**	5	16	12	4	0	4	**1**	10	16	7	2	2	4	**1**	8	11	14	0	4	4
1	14	3	16	4	0	4	**1**	16	5	12	4	0	4	**1**	16	10	7	2	2	4	**1**	11	8	14	0	4	4
1	3	16	14	4	0	4	**1**	6	11	16	10	2	12	**1**	7	12	14	2	2	4	**1**	8	14	11	0	6	6
1	16	3	14	4	0	4	**1**	11	6	16	10	2	12	**1**	12	7	14	2	2	4	**1**	14	8	11	0	6	6
1	4	13	16	8	0	8	**1**	6	16	11	3	1	4	**1**	7	14	12	5	4	9	**1**	11	14	8	0	6	6
1	13	4	16	8	0	8	**1**	16	6	11	3	1	4	**1**	14	7	12	5	4	9	**1**	14	11	8	0	6	6
1	4	16	13	4	0	4	**1**	11	16	6	3	1	4	**1**	12	14	7	2	4	6	**1**	8	12	13	0	6	6
1	16	4	13	4	0	4	**1**	16	11	6	3	1	4	**1**	14	12	7	2	4	6	**1**	12	8	13	0	6	6
1	13	16	4	6	0	6	**1**	6	12	15	3	3	6	**1**	8	9	16	0	2	2	**1**	8	13	12	0	6	6
1	16	13	4	6	0	6	**1**	12	6	15	3	3	6	**1**	9	8	16	0	2	2	**1**	13	8	12	0	6	6
1	4	14	15	6	0	6	**1**	6	15	12	3	1	4	**1**	9	16	8	0	5	5	**1**	12	13	8	0	11	11
1	14	4	15	6	0	6	**1**	15	6	12	3	1	4	**1**	16	9	8	0	5	5	**1**	13	12	8	0	11	11
1	4	15	14	6	0	6	**1**	12	15	6	6	4	10	**1**	8	10	15	0	6	6	Total				208	208	
1	15	4	14	6	0	6	**1**	15	12	6	6	4	10	**1**	10	8	15	0	6	6							

En la Tabla 8 se presentan los 208 cuadrados supermágicos obtenidos como solución al subproblema 1.

Tabla 8: Cuadrados supermágicos con el **1** en la posición (1,1).

1	2	15	16	**1**	2	15	16	**1**	2	16	15	**1**	3	14	16	**1**	3	14	16	**1**	3	14	16	**1**	3	14	16
12	14	3	5	13	14	3	4	13	14	4	3	10	13	4	7	12	13	4	5	15	13	4	2	15	13	4	2
13	7	10	4	12	7	10	5	12	7	9	6	15	6	11	2	15	8	9	2	10	6	11	7	12	8	9	5
8	11	6	9	8	11	6	9	8	11	5	10	8	12	5	9	6	10	7	11	8	12	5	9	6	10	7	11
1	3	16	14	**1**	3	16	14	**1**	3	16	14	**1**	3	16	14	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16
8	15	2	9	12	15	2	5	13	15	2	4	13	15	2	4	8	14	3	9	8	15	2	9	12	14	3	5
13	6	11	4	13	10	7	4	8	6	11	9	12	10	7	5	15	5	12	2	14	5	12	3	15	9	8	2
12	10	5	7	8	6	9	11	12	10	5	7	8	6	9	11	10	11	6	7	11	10	7	6	6	7	10	11
1	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15
12	15	2	5	14	15	2	3	14	15	2	3	15	14	3	2	15	14	3	2	9	12	6	7	13	16	2	3
14	9	8	3	8	5	12	9	12	9	8	5	8	5	12	9	12	9	8	5	16	5	11	2	8	5	11	10
7	6	11	10	11	10	7	6	7	6	11	10	10	11	6	7	6	7	10	11	8	13	3	10	12	9	7	6
1	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	15	14	**1**	4	15	14	**1**	4	15	14
13	16	2	3	16	11	5	2	16	13	3	2	16	13	3	2	9	12	7	6	13	16	3	2	13	16	3	2
12	9	7	6	9	6	12	7	7	6	12	9	11	10	8	5	16	5	10	3	8	5	10	11	12	9	6	7
8	5	11	10	8	13	3	10	10	11	5	8	6	7	9	12	8	13	2	11	12	9	6	7	8	5	10	11
1	4	15	14	**1**	4	15	14	**1**	4	15	14	**1**	4	16	13	**1**	4	16	13	**1**	4	16	13	**1**	4	16	13
16	10	5	3	16	13	2	3	16	13	2	3	14	15	3	2	14	15	3	2	15	14	2	3	15	14	2	3
9	7	12	6	6	7	12	9	10	11	8	5	7	6	10	11	11	10	6	7	6	7	11	10	10	11	7	6
8	13	2	11	11	10	5	8	7	6	9	12	12	9	5	8	8	5	9	12	12	9	5	8	8	5	9	12
1	5	12	16	**1**	5	12	16	**1**	5	16	12	**1**	5	16	12	**1**	5	16	12	**1**	5	16	12	**1**	6	11	16
10	11	6	7	15	11	6	2	8	14	3	9	10	14	3	7	10	14	3	7	15	14	3	2	7	15	2	10
15	4	13	2	10	4	13	7	10	4	13	7	8	4	13	9	15	11	6	2	10	11	6	7	14	4	13	3
8	14	3	9	8	14	3	9	15	11	2	6	15	11	2	6	8	4	9	13	8	4	9	13	12	9	8	5

Tabla 8 (Continuación).

1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16
8	12	5	9	8	15	2	9	12	10	7	5	12	15	2	5	12	15	2	5	13	10	7	4	14	15	2	3
15	3	14	2	12	3	14	5	13	3	14	4	8	3	14	9	14	9	8	3	12	3	14	5	7	4	13	10
10	13	4	7	13	10	7	4	8	15	2	9	13	10	7	4	7	4	13	10	8	15	2	9	12	9	8	5
1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	12	15	1	6	12	15	1	6	12	15	1	6	15	12	1	6	15	12
14	15	2	3	15	12	5	2	11	16	2	5	11	16	2	5	16	11	5	2	11	16	5	2	16	11	2	5
12	9	8	5	8	3	14	9	8	3	13	10	14	9	7	4	7	4	14	9	14	9	4	7	10	13	8	3
7	4	13	10	10	13	4	7	14	9	7	4	8	3	13	10	10	13	3	8	8	3	10	13	7	4	9	14
1	6	15	12	1	6	16	11	1	6	16	11	1	6	16	11	1	7	10	16	1	7	10	16	1	7	10	16
11	16	5	2	12	15	5	2	12	15	5	2	15	12	2	5	8	12	5	9	8	14	3	9	12	14	3	5
8	3	10	13	7	4	10	13	13	10	4	7	10	13	7	4	14	2	15	3	12	2	15	5	8	2	15	9
14	9	4	7	14	9	3	8	8	3	9	14	8	3	9	14	11	13	4	6	13	11	6	4	13	11	6	4
1	7	10	16	1	7	12	14	1	7	12	14	1	7	14	12	1	7	14	12	1	7	14	12	1	7	14	12
14	12	5	3	10	16	3	5	10	16	3	5	8	13	2	11	9	15	4	6	9	15	4	6	10	16	5	3
8	2	15	9	8	2	13	11	15	9	6	4	9	4	15	6	8	2	13	11	16	10	5	3	8	2	11	13
11	13	4	6	15	9	6	4	8	2	13	11	16	10	3	5	16	10	3	5	8	2	11	13	15	9	4	6
1	7	14	12	1	7	16	10	1	7	16	10	1	7	16	10	1	7	16	10	1	10	7	16	1	10	7	16
10	16	5	3	11	13	4	6	12	14	5	3	14	12	3	5	14	13	4	3	8	15	2	9	8	15	2	9
15	9	4	6	14	12	5	3	13	11	4	6	11	13	6	4	11	12	5	6	12	3	14	5	14	5	12	3
8	2	11	13	8	2	9	15	8	2	9	15	8	2	9	15	8	2	9	15	13	6	11	4	11	4	13	6
1	10	7	16	1	10	7	16	1	10	16	7	1	10	16	7	1	11	6	16	1	11	6	16	1	11	6	16
12	15	2	5	14	15	2	3	8	15	9	2	8	15	9	2	7	13	4	10	8	14	3	9	8	14	3	9
8	3	14	9	8	5	12	9	11	4	6	13	13	6	4	11	14	2	15	3	12	2	15	5	15	5	12	2
13	6	11	4	11	4	13	6	14	5	3	12	12	3	5	14	12	8	9	5	13	7	10	4	10	4	13	7
1	11	6	16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	11	6	16
12	8	9	5	12	14	3	5	12	14	3	5	13	14	3	4	14	8	9	3	14	13	4	3	15	14	3	2
14	2	15	3	8	2	15	9	13	7	10	4	12	7	10	5	12	2	15	5	7	2	15	10	8	5	12	9
7	13	4	10	13	7	10	4	8	2	15	9	8	2	15	9	7	13	4	10	12	8	9	5	10	4	13	7
1	11	16	6	1	11	16	6	1	11	16	6	1	12	5	16	1	12	5	16	1	12	6	15	1	12	6	15
8	14	9	3	8	14	9	3	14	8	3	9	10	13	4	7	15	13	4	2	7	14	4	9	8	13	3	10
10	4	7	13	13	7	4	10	7	13	10	4	15	6	11	2	10	6	11	7	16	5	11	2	11	2	16	5
15	5	2	12	12	2	5	15	12	2	5	15	8	3	14	9	8	3	14	9	10	3	13	8	14	7	9	4
1	12	6	15	1	12	7	14	1	12	7	14	1	12	14	7	1	12	14	7	1	12	15	6	1	12	15	6
14	7	9	4	15	6	9	4	8	13	2	11	8	13	11	2	15	6	4	9	7	9	4	14	7	14	9	4
11	2	16	5	10	3	16	5	10	3	16	5	15	6	4	9	8	13	11	2	10	8	13	3	10	3	8	13
8	13	3	10	8	13	2	11	15	6	9	4	10	3	5	16	10	3	5	16	16	5	2	11	16	5	2	11
1	12	15	6	1	12	15	6	1	12	15	6	1	12	15	6	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16
8	13	10	3	10	8	3	13	10	13	8	3	14	7	4	9	8	12	5	9	8	12	5	9	12	8	9	5
14	7	4	9	7	9	14	4	7	4	9	14	8	13	10	3	14	2	15	3	15	3	14	2	14	2	15	3
11	2	5	16	16	5	2	11	16	5	2	11	11	2	5	16	11	7	10	6	10	6	11	7	7	11	6	10
1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	16	4	1	13	16	4
12	8	9	5	14	8	9	3	14	12	5	3	15	8	9	2	15	12	5	2	6	10	7	11	8	12	9	5
15	3	14	2	12	2	15	5	8	2	15	9	12	3	14	5	8	3	14	9	12	8	9	5	10	6	7	11
6	10	7	11	7	11	6	10	11	7	10	6	6	10	7	11	10	6	11	7	15	3	2	14	15	3	2	14
1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4	1	14	3	16	1	14	3	16	1	14	3	16
8	12	9	5	12	8	5	9	12	8	5	9	12	10	7	5	10	11	6	7	12	9	8	5	15	9	8	2
11	7	6	10	6	10	11	7	7	11	10	6	6	8	9	11	15	4	13	2	15	4	13	2	12	4	13	5
14	2	3	15	15	3	2	14	14	2	3	15	15	3	2	14	8	5	12	9	6	7	10	11	6	7	10	11

Tabla 8 (Continuación).

1	14	3	16	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15	1	14	4	15
15	11	6	2	7	12	6	9	8	11	5	10	9	12	6	7	11	8	10	5	12	7	9	6	16	11	5	2
10	4	13	7	16	3	13	2	13	2	16	3	16	5	11	2	16	3	13	2	13	2	16	3	9	6	12	7
8	5	12	9	10	5	11	8	12	7	9	6	8	3	13	10	6	9	7	12	8	11	5	10	8	3	13	10
1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	12	7	1	14	12	7
8	11	2	13	8	13	2	11	9	15	4	16	15	4	9	6	16	5	10	3	8	11	13	2	15	4	6	9
10	5	16	3	9	4	15	6	8	2	13	11	10	5	16	3	9	4	15	6	15	4	6	9	8	11	13	2
15	4	9	6	16	3	10	5	16	3	10	5	8	11	2	13	8	11	2	13	10	5	3	16	10	5	3	16
1	14	15	4	1	14	15	4	1	14	15	4	1	14	15	4	1	14	15	4	1	14	15	4	1	14	15	4
5	11	8	10	6	12	9	7	7	9	6	12	7	12	9	6	8	11	10	5	10	8	5	11	10	11	8	5
12	6	9	7	11	5	8	10	10	8	11	5	10	5	8	11	12	7	6	9	7	9	12	6	7	6	9	12
16	3	2	13	16	3	2	13	16	3	2	13	16	3	2	13	13	2	3	16	16	3	2	13	16	3	2	13
1	14	15	4	1	14	15	4	1	14	15	4	1	15	2	16	1	15	2	16	1	15	4	14	1	15	4	14
11	8	5	10	12	7	6	9	12	9	6	7	12	10	7	5	13	10	7	4	6	12	7	9	8	10	5	11
6	9	12	7	8	11	10	5	5	8	11	10	13	3	14	4	12	3	14	5	16	2	13	3	13	3	16	2
16	3	2	13	13	2	3	16	16	3	2	13	8	6	11	9	8	6	11	9	11	5	10	8	12	6	9	7
1	15	4	14	1	15	4	14	1	15	4	14	1	15	4	14	1	15	6	12	1	15	6	12	1	15	6	12
9	12	7	6	10	8	11	5	12	6	9	7	16	10	5	3	8	10	3	13	10	8	13	3	14	4	9	7
16	5	10	3	16	2	13	3	13	3	16	2	9	7	12	6	11	5	16	2	16	2	11	5	11	5	16	2
8	2	13	11	7	9	6	12	8	10	5	11	8	2	13	11	14	4	9	7	7	9	14	4	8	10	3	13
1	15	12	6	1	15	12	6	1	15	12	6	1	15	12	6	1	15	12	6	1	15	12	6	1	15	14	4
7	9	4	14	7	14	9	4	8	10	13	3	10	8	3	13	10	13	8	3	14	4	7	9	5	11	8	10
10	8	13	3	10	3	8	13	14	4	7	9	7	9	14	4	7	4	9	14	8	10	13	3	12	6	9	7
16	2	5	11	16	2	5	11	11	5	2	16	16	2	5	11	16	2	5	11	11	5	2	16	16	2	3	13
1	15	14	4	1	15	14	4	1	15	14	4	1	15	14	4	1	15	14	4	1	15	14	4	1	15	14	4
6	12	9	7	7	9	6	12	7	12	9	6	8	10	11	5	10	8	5	11	10	11	8	5	11	8	5	10
11	5	8	10	10	8	11	5	10	5	8	11	12	6	7	9	7	9	12	6	7	6	9	12	6	9	12	7
16	2	3	13	16	2	3	13	16	2	3	13	13	3	2	16	16	2	3	13	16	2	3	13	16	2	3	13
1	15	14	4	1	15	14	4	1	16	2	15	1	16	3	14	1	16	3	14	1	16	3	14	1	16	3	14
12	6	7	9	12	9	6	7	12	9	7	6	8	11	6	9	12	7	10	5	13	7	10	4	13	11	6	4
8	10	11	5	5	8	11	10	13	4	14	3	13	2	15	4	13	2	15	4	12	2	15	5	8	2	15	9
13	3	2	16	16	2	3	13	8	5	11	10	12	5	10	7	8	9	6	11	8	9	6	11	12	5	10	7
1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	5	12	1	16	5	12	1	16	5	12
6	11	7	10	10	7	11	6	7	10	6	11	11	6	10	7	8	13	4	9	10	6	11	7	10	13	4	7
15	2	14	3	15	2	14	3	14	3	15	2	14	3	15	2	10	3	14	7	15	3	14	2	8	3	14	9
12	5	9	8	8	9	5	12	12	5	9	8	8	9	5	12	15	2	11	6	8	9	4	13	15	2	11	6
1	16	5	12	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10
15	6	11	2	7	10	4	13	10	7	13	4	13	4	10	7	11	5	12	6	11	6	13	4	13	4	11	6
10	3	14	7	12	5	15	2	15	2	12	5	12	5	15	2	14	4	13	3	14	3	12	5	12	5	14	3
8	9	4	13	14	3	9	8	8	9	3	14	8	9	3	14	8	9	2	15	8	9	2	15	8	9	2	15
1	16	7	10	1	16	10	7	1	16	10	7	1	16	11	6	1	16	11	6	1	16	11	6	1	16	13	4
14	5	12	3	11	6	4	13	13	4	6	11	7	10	13	4	10	7	4	13	13	4	7	10	6	9	8	11
11	4	13	6	8	9	15	2	8	9	15	2	14	3	8	9	8	9	14	3	8	9	14	3	12	7	10	5
8	9	2	15	14	3	5	12	12	5	3	14	12	5	2	15	15	2	5	12	12	5	2	15	15	2	3	14
1	16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	4	1	16	13	4								
6	11	10	7	7	10	11	6	10	7	6	11	11	6	7	10	12	9	8	5								
12	5	8	9	12	5	8	9	8	9	12	5	8	9	12	5	6	7	10	11								
15	2	3	14	14	3	2	15	15	2	3	14	14	3	2	15	15	2	3	14								

Subproblema 2

Para resolver este caso solo se requiere cambiar en el Modelo: min = x(1,2). Las restricciones son las mismas y el orden en que se introducen también influye en las soluciones que se van obteniendo. Como se observa en la Tabla 9, coinciden las mismas combinaciones de números para las cuales no existe solución factible; ahora, con el 1 en la segunda posición de la fila.

Tabla 9: Combinaciones de valores en la primera fila, para las que no existen cuadrados mágicos.

15	**1**	2	16	13	**1**	5	15	13	**1**	6	14	11	**1**	7	15	10	**1**	9	14	11	**1**	9	13	11	**1**	10	12
16	**1**	2	15	15	**1**	5	13	14	**1**	6	13	15	**1**	7	11	14	**1**	9	10	13	**1**	9	11	12	**1**	10	11
14	**1**	3	16	5	**1**	13	15	6	**1**	13	14	7	**1**	11	15	9	**1**	10	14	9	**1**	11	13	10	**1**	11	12
16	**1**	3	14	15	**1**	13	5	14	**1**	13	6	15	**1**	11	7	14	**1**	10	9	13	**1**	11	9	12	**1**	11	10
12	**1**	5	16	5	**1**	15	13	6	**1**	14	13	7	**1**	15	11	9	**1**	14	10	9	**1**	13	11	10	**1**	12	11
16	**1**	5	12	13	**1**	15	5	13	**1**	14	6	11	**1**	15	7	10	**1**	14	9	11	**1**	13	9	11	**1**	12	10
												8	**1**	9	16												
												16	**1**	9	8												

En la Tabla 10 se presentan las 70 combinaciones para las que se obtuvo solución. En este subproblema, como no hay cuadrados simétricos manteniendo el 1 en la posición x(1,2), solo tiene interés la cantidad total (T) de cuadrados en la que dicha combinación aparece en la primera fila. Como puede apreciarse, ocurre algo similar al subproblema 1; lo que ahora hay coincidencia en la cantidad de cuadrados en las parejas de combinaciones del tipo **a**-1-b-**c** y **c**-1-b-**a**; es decir, las que intercambian los elementos extremos.

Tabla 10: Combinaciones de números para las que se obtiene solución al subproblema 2.

Combinación				T	Combinación				T	Combinación				T	Combinación				T	Combinación				T
2	**1**	15	16	1	14	**1**	4	15	6	6	**1**	16	11	14	12	**1**	7	14	6	8	**1**	15	10	8
16	**1**	15	2	1	15	**1**	4	14	6	11	**1**	16	6	14	14	**1**	7	12	6	10	**1**	15	8	8
2	**1**	16	15	2	4	**1**	14	15	6	12	**1**	6	15	6	7	**1**	12	14	4	11	**1**	8	14	8
15	**1**	16	2	2	15	**1**	14	4	6	15	**1**	6	12	6	14	**1**	12	7	4	14	**1**	8	11	8
3	**1**	14	16	4	4	**1**	15	14	10	6	**1**	12	15	8	7	**1**	14	12	13	8	**1**	11	14	6
16	**1**	14	3	4	14	**1**	15	4	10	15	**1**	12	6	8	12	**1**	14	7	13	14	**1**	11	8	6
3	**1**	16	14	4	5	**1**	12	16	4	6	**1**	15	12	8	9	**1**	8	16	5	8	**1**	14	11	4
14	**1**	16	3	4	16	**1**	12	5	4	12	**1**	15	6	8	16	**1**	8	9	5	11	**1**	14	8	4
13	**1**	4	16	6	5	**1**	16	12	4	10	**1**	7	16	4	8	**1**	16	9	6	12	**1**	8	13	8
16	**1**	4	13	6	12	**1**	16	5	4	16	**1**	7	10	4	9	**1**	16	8	6	13	**1**	8	12	8
4	**1**	13	16	4	11	**1**	6	16	4	7	**1**	10	16	6	10	**1**	8	15	10	8	**1**	12	13	11
16	**1**	13	4	4	16	**1**	6	11	4	16	**1**	10	7	6	15	**1**	8	10	10	13	**1**	12	8	11
4	**1**	16	13	12	6	**1**	11	16	4	7	**1**	16	10	14	8	**1**	10	15	6	8	**1**	13	12	6
13	**1**	16	4	12	16	**1**	11	6	4	10	**1**	16	7	14	15	**1**	10	8	6	12	**1**	13	8	6
																					Total		464	

En la Tabla 11 se presentan, siguiendo un orden ascendente entre los tres números que acompañan al 1, los 464 cuadrados supermágicos diferentes y asimétricos obtenidos como solución al subproblema 2.

Tabla 11: Cuadrados supermágicos con el 1 en la posición (1,2).

2	**1**	15	16	2	**1**	16	15	2	**1**	16	15	3	**1**	14	16	3	**1**	14	16	3	**1**	14	16	3	**1**	14	16
14	13	3	4	11	13	4	6	14	13	4	3	8	15	2	9	12	15	2	5	13	15	2	4	13	15	2	4
11	8	10	5	14	8	9	3	11	8	9	6	13	6	11	4	13	10	7	4	8	6	11	9	12	10	7	5
7	12	6	9	7	12	5	10	7	12	5	10	10	12	7	5	6	8	11	9	10	12	7	5	6	8	11	9
3	**1**	16	14	3	**1**	16	14	3	**1**	16	14	3	**1**	16	14	4	**1**	13	16	4	**1**	13	16	4	**1**	13	16
13	15	4	2	13	15	4	2	15	13	2	4	15	13	2	4	14	15	3	2	14	15	3	2	15	14	2	3
8	6	9	11	12	10	5	7	6	8	11	9	10	12	7	5	7	6	10	11	11	10	6	7	6	7	11	10
10	12	5	7	6	8	9	11	10	12	5	7	6	8	9	11	9	12	8	5	5	8	12	9	9	12	8	5
4	**1**	13	16	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15
15	14	2	3	12	9	6	7	13	16	3	2	13	16	3	2	13	11	8	2	16	13	2	3	16	13	2	3
10	11	7	6	13	8	11	2	7	6	9	12	11	10	5	8	12	6	9	7	5	8	11	10	9	12	7	6
5	8	12	9	5	16	3	10	10	11	8	5	6	7	12	9	5	16	3	10	9	12	7	6	5	8	11	10
4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14
7	16	2	9	8	11	5	10	9	16	2	7	12	9	7	6	13	10	8	3	13	12	6	3	13	16	2	3
10	5	11	8	13	6	12	3	8	5	11	10	13	8	10	3	12	7	9	6	8	5	11	10	6	7	9	12
13	12	6	3	9	16	2	7	13	12	6	3	5	16	2	11	5	16	2	11	9	16	2	7	11	10	8	5
4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13
13	16	2	3	16	13	3	2	16	13	3	2	5	14	3	12	5	15	2	12	6	12	5	11	9	14	3	8
10	11	5	8	5	8	10	11	9	12	6	7	15	8	9	2	14	8	9	3	15	7	10	2	15	12	5	2
7	6	12	9	9	12	6	7	5	8	10	11	10	11	6	7	11	10	7	6	9	14	3	8	6	7	10	11
4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13
9	15	2	8	11	15	6	2	14	15	2	3	14	15	2	3	15	11	2	6	15	12	5	2	15	14	3	2
14	12	5	3	14	10	3	7	5	8	9	12	9	12	5	8	10	14	7	3	6	7	10	11	5	8	9	12
7	6	11	10	5	8	9	12	11	10	7	6	7	6	11	10	5	8	9	12	9	14	3	8	10	11	6	7
4	**1**	16	13	5	**1**	12	16	5	**1**	12	16	5	**1**	12	16	5	**1**	12	16	5	**1**	16	12	5	**1**	16	12
15	14	3	2	8	14	3	9	10	14	3	7	10	14	3	7	15	14	3	2	10	14	7	3	10	14	7	3
9	12	5	8	10	4	13	7	8	4	13	9	15	11	6	2	10	11	6	7	8	4	9	13	15	11	2	6
6	7	10	11	11	15	6	2	11	15	6	2	4	8	13	9	4	8	13	9	11	15	2	6	4	8	9	13
5	**1**	16	12	5	**1**	16	12	6	**1**	11	16	6	**1**	11	16	6	**1**	11	16	6	**1**	11	16	6	**1**	12	15
14	10	3	7	14	10	3	7	12	15	5	2	12	15	5	2	15	12	2	5	15	12	2	5	4	16	5	9
4	8	13	9	11	15	6	2	7	4	10	13	13	10	4	7	4	7	13	10	10	13	7	4	13	3	10	8
11	15	2	6	4	8	9	13	9	14	8	3	3	8	14	9	9	14	8	3	3	8	14	9	11	14	7	2
6	**1**	12	15	6	**1**	12	15	6	**1**	12	15	6	**1**	12	15	6	**1**	12	15	6	**1**	12	15	6	**1**	12	15
8	10	3	13	9	16	5	4	11	14	7	2	11	16	5	2	11	16	5	2	16	11	2	5	16	11	2	5
11	7	14	2	8	3	10	13	8	3	10	13	7	4	9	14	13	10	3	8	3	8	13	10	9	14	7	4
9	16	5	4	11	14	7	2	9	16	5	4	10	13	8	3	4	7	14	9	9	14	7	4	3	8	13	10
6	**1**	15	12	6	**1**	15	12	6	**1**	15	12	6	**1**	15	12	6	**1**	15	12	6	**1**	15	12	6	**1**	15	12
3	16	2	13	11	8	10	5	11	16	2	5	11	16	2	5	13	16	2	3	14	7	9	4	16	11	5	2
14	9	7	4	14	9	7	4	4	7	9	14	10	13	3	8	4	9	7	14	11	10	8	5	3	8	10	13
11	8	10	5	3	16	2	13	13	10	8	3	7	4	14	9	11	8	10	5	3	16	2	13	9	14	4	7
6	**1**	15	12	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11
16	11	5	2	3	12	5	14	3	14	7	10	3	15	2	14	7	10	3	14	7	15	10	2	9	15	2	8
9	14	4	7	15	8	9	2	13	4	9	8	12	8	9	5	9	8	13	4	12	4	5	13	12	14	3	5
3	8	10	13	10	13	4	7	12	15	2	5	13	10	7	4	12	15	2	5	9	14	3	8	7	4	13	10
6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11
9	12	5	8	10	12	7	5	12	10	5	7	12	15	2	5	12	15	2	5	15	7	2	10	15	12	5	2
15	14	3	2	15	13	2	4	13	15	4	2	3	8	9	14	9	14	3	8	4	12	13	5	3	8	9	14
4	7	10	13	3	8	9	14	3	8	9	14	13	10	7	4	7	4	13	10	9	14	3	8	10	13	4	7

Tabla 11 (Continuación).

6	**1**	16	11	7	**1**	10	16	7	**1**	10	16	7	**1**	10	16	7	**1**	10	16	7	**1**	10	16	7	**1**	10	16
15	12	5	2	11	13	4	6	12	14	5	3	12	14	5	3	14	12	3	5	14	12	3	5	14	13	4	3
9	14	3	8	14	12	5	3	6	4	11	13	13	11	4	6	4	6	13	11	11	13	6	4	11	12	5	6
4	7	10	13	2	8	15	9	9	15	8	2	2	8	15	9	9	15	8	2	2	8	15	9	2	8	15	9
7	**1**	12	14	7	**1**	12	14	7	**1**	12	14	7	**1**	12	14	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12
10	16	5	3	10	16	5	3	16	10	3	5	16	10	3	5	2	13	8	11	2	16	3	13	6	9	4	15
6	4	9	15	13	11	2	8	2	8	13	11	9	15	6	4	15	4	9	6	15	9	6	4	11	8	13	2
11	13	8	2	4	6	15	9	9	15	6	4	2	8	13	11	10	16	3	5	10	8	11	5	10	16	3	5
7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12
10	8	11	5	10	16	3	5	10	16	3	5	11	13	8	2	13	16	3	2	15	6	9	4	15	9	4	6
15	9	6	4	4	6	9	15	11	13	2	8	6	4	9	15	4	9	6	15	10	11	8	5	2	8	13	11
2	16	3	13	13	11	8	2	6	4	15	9	10	16	3	5	10	8	11	5	2	16	3	13	10	16	3	5
7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	14	12	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10
15	9	4	6	16	10	5	3	16	10	5	3	2	12	5	15	2	14	3	15	2	15	4	13	4	13	2	15
10	16	5	3	2	8	11	13	9	15	4	6	14	8	9	3	12	8	9	5	11	6	9	8	9	8	11	6
2	8	11	13	9	15	4	6	2	8	11	13	11	13	4	6	13	11	6	4	14	12	5	3	14	12	5	3
7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10
6	14	11	3	9	12	5	8	9	14	3	8	11	8	9	6	12	14	3	5	12	14	3	5	14	6	3	11
12	4	5	13	14	15	2	3	12	15	2	5	14	13	4	3	2	8	9	15	9	15	2	8	4	12	13	5
9	15	2	8	4	6	11	13	6	4	13	11	2	12	5	15	13	11	6	4	6	4	13	11	9	15	2	8
7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	7	**1**	16	10	8	**1**	10	15	8	**1**	10	15	8	**1**	10	15	8	**1**	10	15
14	8	9	3	14	12	5	3	14	12	5	3	3	13	6	12	5	11	4	14	11	14	5	4	12	13	6	3
11	13	4	6	2	8	9	15	9	15	2	8	14	4	11	5	12	6	13	3	13	12	3	6	5	4	11	14
2	12	5	15	11	13	4	6	4	6	11	13	9	16	7	2	9	16	7	2	2	7	16	9	9	16	7	2
8	**1**	10	15	8	**1**	10	15	8	**1**	11	14	8	**1**	11	14	8	**1**	11	14	8	**1**	11	14	8	**1**	11	14
13	12	3	6	14	11	4	5	2	13	7	12	5	10	4	15	10	15	5	4	12	13	7	2	13	12	2	7
11	14	5	4	3	6	13	12	15	4	10	5	12	7	13	2	13	12	2	7	5	4	10	15	10	15	5	4
2	7	16	9	9	16	7	2	9	16	6	3	9	16	6	3	3	6	16	9	9	16	6	3	3	6	16	9
8	**1**	11	14	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13
15	10	4	5	3	15	10	6	5	16	9	4	6	10	3	15	6	15	10	3	9	14	7	4	10	15	6	3
2	7	13	12	14	2	7	11	11	2	7	14	9	7	14	4	11	2	7	14	6	3	10	15	5	4	9	16
9	16	6	3	9	16	5	4	10	15	6	3	11	16	5	2	9	16	5	4	11	16	5	2	11	14	7	2
8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	12	13	8	**1**	13	12	8	**1**	13	12
11	7	2	14	11	14	7	2	14	7	2	11	14	11	2	7	15	10	3	6	2	11	7	14	3	10	6	15
6	10	15	3	5	4	9	16	3	10	15	6	9	16	5	4	9	16	5	4	15	6	10	3	14	7	11	2
9	16	5	4	10	15	6	3	9	16	5	4	3	6	15	10	2	7	14	11	9	16	4	5	9	16	4	5
8	**1**	13	12	8	**1**	13	12	8	**1**	13	12	8	**1**	13	12	8	**1**	14	11	8	**1**	14	11	8	**1**	14	11
10	15	3	6	11	14	2	7	14	11	7	2	15	10	6	3	10	15	4	5	12	13	2	7	13	12	7	2
11	14	2	7	10	15	3	6	3	6	10	15	2	7	11	14	3	6	9	16	9	16	3	6	3	6	9	16
5	4	16	9	5	4	16	9	9	16	4	5	9	16	4	5	13	12	7	2	5	4	15	10	10	15	4	5
8	**1**	14	11	8	**1**	15	10	8	**1**	15	10	8	**1**	15	10	8	**1**	15	10	8	**1**	15	10	8	**1**	15	10
15	10	5	4	4	11	5	14	5	16	2	11	9	12	6	7	11	14	4	5	11	16	2	5	12	13	3	6
9	16	3	6	9	6	12	7	12	13	3	6	4	5	11	14	2	7	9	16	6	13	3	12	9	16	2	7
2	7	12	13	13	16	2	3	9	4	14	7	13	16	2	3	13	12	6	3	9	4	14	7	5	4	14	11
8	**1**	15	10	8	**1**	15	10	8	**1**	16	9	8	**1**	16	9	8	**1**	16	9	8	**1**	16	9	8	**1**	16	9
13	12	6	3	14	11	5	4	2	12	5	15	2	15	10	7	3	14	11	6	10	7	2	15	11	6	3	14
2	7	9	16	9	16	2	7	11	7	10	6	13	4	5	12	13	4	5	12	5	12	13	4	5	12	13	4
11	14	4	5	3	6	12	13	13	14	3	4	11	14	3	6	10	15	2	7	11	14	3	6	10	15	2	7

Tabla 11 (Continuación).

8	1	16	9	9	1	8	16	9	1	8	16	9	1	8	16	9	1	8	16	9	1	8	16	9	1	16	8
11	12	5	6	4	12	5	13	4	12	5	13	14	12	5	3	15	7	2	10	15	12	5	2	4	12	13	5
2	7	10	15	14	6	11	3	15	7	10	2	4	6	11	13	6	12	13	3	4	7	10	13	14	6	3	11
13	14	3	4	7	15	10	2	6	14	11	3	7	15	10	2	4	14	11	5	6	14	11	3	7	15	2	10
9	1	16	8	9	1	16	8	9	1	16	8	9	1	16	8	9	1	16	8	10	1	7	16	10	1	7	16
4	12	13	5	6	7	10	11	12	4	5	13	12	4	5	13	15	7	10	2	8	15	9	2	8	15	9	2
15	7	2	10	15	12	5	2	6	14	11	3	7	15	10	2	6	12	5	11	11	4	6	13	13	6	4	11
6	14	3	11	4	14	3	13	7	15	2	10	6	14	3	11	4	14	3	13	5	14	12	3	3	12	14	5
10	1	7	16	10	1	7	16	10	1	8	15	10	1	8	15	10	1	8	15	10	1	8	15	10	1	8	15
15	8	2	9	15	8	2	9	4	16	9	5	5	16	9	4	7	13	12	2	7	14	11	2	7	16	9	2
4	11	13	6	6	13	11	4	13	3	6	12	12	3	6	13	14	4	5	11	12	3	6	13	11	4	5	14
5	14	12	3	3	12	14	5	7	14	11	2	7	14	11	2	3	16	9	6	5	16	9	4	6	13	12	3
10	1	8	15	10	1	8	15	10	1	8	15	10	1	8	15	10	1	8	15	10	1	15	8	10	1	15	8
7	16	9	2	12	6	3	13	14	5	4	11	16	7	2	9	16	7	2	9	6	13	3	12	7	6	12	9
13	6	3	12	7	11	14	2	7	12	13	2	3	12	13	6	5	14	11	4	11	16	2	5	14	11	5	4
4	11	14	5	5	16	9	4	3	16	9	6	5	14	11	4	3	12	13	6	7	4	14	9	3	16	2	13
10	1	15	8	10	1	15	8	10	1	15	8	10	1	15	8	10	1	15	8	10	1	15	8	10	1	16	7
7	16	2	9	7	16	2	9	12	13	3	6	14	5	11	4	16	7	9	2	16	7	9	2	3	8	9	14
4	11	5	14	6	13	3	12	5	16	2	11	7	12	6	9	3	12	6	13	5	14	4	11	15	12	5	2
13	6	12	3	11	4	14	5	7	4	14	9	3	16	2	13	5	14	4	11	3	12	6	13	6	13	4	11
10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7
3	13	4	14	3	15	2	14	5	8	9	12	5	12	13	4	5	15	2	12	6	8	11	9	6	13	4	11
6	8	9	11	8	12	5	9	15	14	3	2	11	6	3	14	8	14	3	9	15	13	2	4	3	8	9	14
15	12	5	2	13	6	11	4	4	11	6	13	8	15	2	9	11	4	13	6	3	12	5	14	15	12	5	2
10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	11	1	6	16
8	6	9	11	8	15	2	9	8	15	2	9	13	4	5	12	15	8	9	2	15	8	9	2	8	14	9	3
13	15	4	2	3	12	5	14	5	14	3	12	3	14	11	6	3	12	5	14	5	14	3	12	10	4	7	13
3	12	5	14	13	6	11	4	11	4	13	6	8	15	2	9	6	13	4	11	4	11	6	13	5	15	12	2
11	1	6	16	11	1	6	16	11	1	6	16	11	1	8	14	11	1	8	14	11	1	8	14	11	1	8	14
8	14	9	3	14	8	3	9	14	8	3	9	2	16	9	7	6	12	13	3	6	16	9	3	6	16	9	3
13	7	4	10	4	10	13	7	7	13	10	4	15	5	4	10	15	5	4	10	10	4	5	15	13	7	2	12
2	12	15	5	5	15	12	2	2	12	15	5	6	12	13	3	2	16	9	7	7	13	12	2	4	10	15	5
11	1	8	14	11	1	8	14	11	1	8	14	11	1	8	14	11	1	14	8	11	1	14	8	11	1	14	8
7	16	9	2	15	4	5	10	16	6	3	9	16	6	3	9	6	16	3	9	6	16	3	9	16	6	9	3
10	5	4	15	6	13	12	3	2	12	13	7	5	15	10	4	4	10	5	15	7	13	2	12	2	12	7	13
6	12	13	3	2	16	9	7	5	15	10	4	2	12	13	7	13	7	12	2	10	4	15	5	5	15	4	10
11	1	14	8	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6
16	6	9	3	2	8	9	15	2	14	3	15	2	15	4	13	4	8	13	9	4	13	2	15	5	8	9	12
5	15	4	10	14	12	5	3	8	12	5	9	7	10	5	12	14	10	3	7	5	12	7	10	14	15	2	3
2	12	7	13	7	13	4	10	13	7	10	4	14	8	9	3	5	15	2	12	14	8	9	3	4	10	7	13
11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6
5	12	13	4	5	14	3	12	8	4	9	13	8	14	3	9	8	14	3	9	13	4	5	12	14	8	9	3
10	7	2	15	8	15	2	9	10	14	7	3	2	12	5	15	5	15	2	12	2	15	10	7	2	12	5	15
8	14	3	9	10	4	13	7	5	15	2	12	13	7	10	4	10	4	13	7	8	14	3	9	7	13	4	10
11	1	16	6	12	1	6	15	12	1	6	15	12	1	6	15	12	1	6	15	12	1	6	15	12	1	6	15
14	8	9	3	3	13	10	8	7	14	9	4	8	13	10	3	9	7	4	14	13	8	3	10	14	7	4	9
5	15	2	12	14	4	7	9	13	8	3	10	9	4	7	14	8	10	13	3	7	14	9	4	3	10	13	8
4	10	7	13	5	16	11	2	2	11	16	5	5	16	11	2	5	16	11	2	2	11	16	5	5	16	11	2

Tabla 11 (Continuación).

12	**1**	7	14	12	**1**	7	14	12	**1**	7	14	12	**1**	7	14	12	**1**	7	14	12	**1**	7	14	12	**1**	8	13
2	13	11	8	6	15	9	4	8	13	11	2	9	6	4	15	13	8	2	11	15	6	4	9	3	16	9	6
15	4	6	9	13	8	2	11	9	4	6	15	8	11	13	2	6	15	9	4	2	11	13	8	14	7	2	11
5	16	10	3	3	10	16	5	5	16	10	3	5	16	10	3	3	10	16	5	5	16	10	3	5	10	15	4
12	**1**	8	13	12	**1**	8	13	12	**1**	8	13	12	**1**	8	13	12	**1**	8	13	12	**1**	8	13	12	**1**	8	13
5	14	11	4	6	15	10	3	6	16	9	3	7	14	11	2	10	6	3	15	14	7	2	11	15	6	3	10
10	3	6	15	9	4	5	16	11	7	2	14	9	4	5	16	5	11	14	4	5	16	9	4	5	16	9	4
7	16	9	2	7	14	11	2	5	10	15	4	6	15	10	3	7	16	9	2	3	10	15	6	2	11	14	7
12	**1**	13	8	12	**1**	13	8	12	**1**	13	8	12	**1**	13	8	12	**1**	13	8	12	**1**	13	8	12	**1**	14	7
2	7	11	14	3	6	10	15	6	15	3	10	7	14	2	11	14	7	11	2	15	6	10	3	2	8	13	11
15	10	6	3	14	11	7	2	7	14	2	11	6	15	3	10	3	10	6	15	2	11	7	14	15	9	4	6
5	16	4	9	5	16	4	9	9	4	16	5	9	4	16	5	5	16	4	9	5	16	4	9	5	16	3	10
12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7
3	16	5	10	4	9	6	15	4	9	6	15	5	11	8	10	6	4	9	15	6	15	4	9	8	13	2	11
6	9	4	15	5	8	11	10	13	16	3	2	4	6	9	15	11	13	8	2	3	10	5	16	5	16	3	10
13	8	11	2	13	16	3	2	5	8	11	10	13	16	3	2	5	16	3	10	13	8	11	2	9	4	15	6
12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	14	7	12	**1**	15	6	12	**1**	15	6
11	8	13	2	13	8	11	2	15	4	9	6	15	6	9	4	15	9	6	4	4	9	7	14	4	9	7	14
6	9	4	15	3	10	5	16	2	13	8	11	5	16	3	10	2	16	3	13	5	8	10	11	13	16	2	3
5	16	3	10	6	15	4	9	5	16	3	10	2	11	8	13	5	8	11	10	13	16	2	3	5	8	10	11
12	**1**	15	6	12	**1**	15	6	12	**1**	15	6	12	**1**	15	6	12	**1**	15	6	12	**1**	15	6	12	**1**	16	5
5	10	8	11	7	14	4	9	8	13	3	10	13	8	10	13	14	7	9	4	14	9	7	4	2	15	6	11
4	7	9	14	2	11	5	16	5	16	2	11	2	11	5	16	5	16	2	11	3	16	2	13	7	10	3	14
13	16	2	3	13	8	10	3	9	4	14	7	7	14	9	4	3	10	8	13	5	8	10	11	13	8	9	4
12	**1**	16	5	12	**1**	16	5	12	**1**	16	5	13	**1**	4	16	13	**1**	4	16	13	**1**	4	16	13	**1**	4	16
6	11	2	15	9	8	13	4	13	4	9	8	6	10	7	11	8	12	9	5	8	12	9	5	12	8	5	9
3	14	7	10	7	10	3	14	3	14	7	10	12	8	9	5	10	6	7	11	11	7	6	10	7	11	10	6
13	8	9	4	6	15	2	11	6	15	2	11	3	15	14	2	3	15	14	2	2	14	15	3	2	14	15	3
13	**1**	4	16	13	**1**	4	16	13	**1**	8	12	13	**1**	8	12	13	**1**	8	12	13	**1**	8	12	13	**1**	8	12
12	8	5	9	12	10	7	5	4	11	14	5	4	16	9	5	4	16	9	5	11	7	2	14	14	7	2	11
6	10	11	7	6	8	9	11	15	6	3	10	10	6	3	15	11	7	2	14	6	16	9	3	3	16	9	6
3	15	14	2	3	15	14	2	2	16	9	7	7	11	14	2	6	10	15	3	4	10	15	5	4	10	15	5
13	**1**	8	12	13	**1**	8	12	13	**1**	8	12	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8
15	3	6	10	16	4	5	9	16	4	5	9	3	10	15	6	4	7	14	9	4	16	5	9	4	16	5	9
4	14	11	5	2	14	11	7	3	15	10	6	14	7	2	11	15	10	3	6	6	10	3	15	7	11	2	14
2	16	9	7	3	15	10	6	2	14	11	7	4	16	5	9	2	16	5	11	11	7	14	2	10	6	15	3
13	**1**	12	8	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8	13	**1**	12	8
6	10	15	3	11	2	7	14	14	2	7	11	14	2	7	11	15	3	10	6	16	4	9	5	16	4	9	5
11	7	2	14	6	15	10	3	3	15	10	6	4	16	9	5	4	14	7	9	2	14	7	11	3	15	6	10
4	16	5	9	4	16	5	9	4	16	5	9	3	15	6	10	2	16	5	11	3	15	6	10	2	14	7	11
13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4
2	7	10	15	2	8	9	15	2	12	5	15	3	8	9	14	3	12	5	14	3	14	7	10	7	10	3	14
11	12	5	6	12	14	3	5	8	14	3	9	12	15	2	5	8	15	2	9	6	11	2	15	2	15	6	11
8	14	3	9	7	11	6	10	11	7	10	6	6	10	7	11	10	6	11	7	12	8	9	5	12	8	9	5
13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	13	**1**	16	4	14	**1**	4	15	14	**1**	4	15
8	12	5	9	8	12	5	9	11	7	10	6	12	8	9	5	12	8	9	5	5	11	10	8	7	12	9	6
2	14	3	15	3	15	2	14	2	12	5	15	2	14	3	15	3	15	2	14	12	6	7	9	11	8	5	10
11	7	10	6	10	6	11	7	8	14	3	9	7	11	6	10	6	10	7	11	3	16	13	2	2	13	16	3

Tabla 11 (Continuación).

14	**1**	4	15	14	**1**	4	15	14	**1**	4	15	14	**1**	4	15	14	**1**	7	12	14	**1**	7	12	14	**1**	7	12
8	11	10	5	9	7	6	12	11	8	5	10	12	7	6	9	2	11	13	8	4	15	9	6	8	11	13	2
9	6	7	12	8	10	11	5	7	12	9	6	5	10	11	8	15	6	4	9	11	8	2	13	9	6	4	15
3	16	13	2	3	16	13	2	2	13	16	3	3	16	13	2	3	16	10	5	5	10	16	3	3	16	10	5
14	**1**	7	12	14	**1**	7	12	14	**1**	7	12	14	**1**	8	11	14	**1**	8	11	14	**1**	8	11	14	**1**	8	11
9	4	6	15	11	8	2	13	15	4	6	9	3	13	12	6	4	15	10	5	7	12	13	2	10	5	4	15
8	13	11	2	4	15	9	6	2	13	11	8	10	4	5	15	9	6	3	16	9	6	3	16	3	12	13	6
3	16	10	5	5	10	16	3	3	16	10	5	7	16	9	2	7	12	13	2	4	15	10	5	7	16	9	2
14	**1**	8	11	14	**1**	8	11	14	**1**	8	11	14	**1**	8	11	14	**1**	11	8	14	**1**	11	8	14	**1**	11	8
10	5	4	15	12	7	2	13	15	4	5	10	15	5	4	10	2	7	13	12	4	15	5	10	5	4	10	15
7	16	9	2	3	16	9	6	3	16	9	6	2	16	9	7	15	10	4	5	7	12	2	13	12	13	7	2
3	12	13	6	5	10	15	4	2	13	12	7	3	12	13	6	3	16	6	9	9	6	16	3	3	16	6	9
14	**1**	11	8	14	**1**	11	8	14	**1**	11	8	14	**1**	12	7	14	**1**	12	7	14	**1**	12	7	14	**1**	12	7
7	12	2	13	12	7	13	2	15	4	10	5	4	15	6	9	8	11	2	13	11	8	13	2	15	4	9	6
4	15	5	10	5	10	4	15	2	13	7	12	5	10	3	16	3	16	5	10	5	10	3	16	3	16	5	10
9	6	16	3	3	16	6	9	3	16	6	9	11	8	13	2	9	6	15	4	4	15	6	9	2	13	8	11
14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4
3	6	12	13	3	8	10	13	6	7	9	12	7	12	6	9	8	5	11	10	8	11	5	10	10	5	11	8
10	11	5	8	6	9	7	12	3	10	8	13	2	13	3	16	9	16	2	7	3	16	2	13	3	12	6	13
7	16	2	9	11	16	2	5	11	16	2	5	11	8	10	5	3	12	6	13	9	6	12	7	7	16	2	9
14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	16	3	14	**1**	16	3	14	**1**	16	3	14	**1**	16	3
10	5	11	8	11	8	10	5	12	7	9	6	5	12	7	10	7	10	5	12	9	8	11	6	11	6	9	8
7	16	2	9	2	13	3	16	3	16	2	13	4	13	2	15	2	15	4	13	4	13	2	15	2	15	4	13
3	12	6	13	7	12	6	9	5	10	8	11	11	8	9	6	11	8	9	6	7	12	5	10	7	12	5	10
15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	6	12
5	10	11	8	6	12	9	7	8	10	11	5	9	6	7	12	10	8	5	11	12	6	7	9	3	10	13	8
12	7	6	9	10	8	5	11	9	7	6	12	8	11	10	5	6	12	9	7	5	11	10	8	14	7	4	9
2	16	13	3	3	13	16	2	2	16	13	3	2	16	13	3	3	13	16	2	2	16	13	3	2	16	11	5
15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	8	10	15	**1**	8	10
4	14	9	7	8	10	13	3	9	4	7	14	10	8	3	13	14	4	7	9	2	11	14	7	2	12	13	7
10	8	3	13	9	7	4	14	8	13	10	3	4	14	9	7	3	13	10	8	13	6	3	12	11	5	4	14
5	11	16	2	2	16	11	5	2	16	11	5	5	11	16	2	2	16	11	5	4	16	9	5	6	16	9	3
15	**1**	8	10	15	**1**	8	10	15	**1**	8	10	15	**1**	8	10	15	**1**	8	10	15	**1**	8	10	15	**1**	8	10
4	14	11	5	6	12	13	3	11	4	5	14	12	3	6	13	12	6	3	13	13	3	6	12	13	3	6	12
9	7	2	16	9	7	2	16	2	13	12	7	5	16	9	4	2	16	9	7	2	14	11	7	4	16	9	5
6	12	13	3	4	14	11	5	6	16	9	3	2	14	11	7	5	11	14	4	4	16	9	5	2	14	11	7
15	**1**	8	10	15	**1**	10	8	15	**1**	10	8	15	**1**	10	8	15	**1**	10	8	15	**1**	10	8	15	**1**	10	8
14	4	5	11	3	6	13	12	4	14	5	11	5	4	11	14	6	12	3	13	12	6	13	3	14	4	11	5
2	16	9	7	14	11	4	5	6	12	3	13	12	13	6	3	4	14	5	11	5	11	4	14	3	13	6	12
3	13	12	6	2	16	7	9	9	7	16	2	2	16	7	9	9	7	16	2	2	16	7	9	2	16	7	9
15	**1**	12	6	15	**1**	12	6	15	**1**	12	6	15	**1**	12	6	15	**1**	12	6	15	**1**	12	6	15	**1**	12	6
2	7	14	11	4	14	7	9	8	3	10	13	8	10	3	13	10	8	13	3	13	3	10	8	13	3	10	8
13	10	3	8	5	11	2	16	9	16	5	4	2	16	5	11	5	11	2	16	2	14	7	11	4	16	5	9
4	16	5	9	10	8	13	3	2	14	7	11	9	7	14	4	4	14	7	9	4	16	5	9	2	14	7	11
15	**1**	12	6	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4
14	4	9	7	2	8	11	13	6	12	7	9	7	6	9	12	8	10	5	11	10	8	11	5	12	6	9	7
2	16	5	11	7	9	6	12	3	13	2	16	2	11	8	13	2	16	3	13	3	13	2	16	2	16	3	13
3	13	8	10	10	16	3	5	10	8	11	5	10	16	3	5	9	7	12	6	6	12	7	9	5	11	8	10

Tabla 11 (Continuación).

15	1	16	2	15	1	16	2	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13	16	1	4	13
3	8	9	14	6	8	9	11	5	8	9	12	6	11	10	7	7	10	11	6	10	7	6	11	11	6	7	10
6	13	4	11	3	13	4	14	11	10	7	6	9	8	5	12	9	8	5	12	5	12	9	8	5	12	9	8
10	12	5	7	10	12	5	7	2	15	14	3	3	14	15	2	2	15	14	3	3	14	15	2	2	15	14	3
16	1	4	13	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	6	11	16	1	7	10	16	1	7	10
11	8	9	6	4	13	10	7	7	10	13	4	10	7	4	13	13	4	7	10	4	13	11	6	6	11	13	4
5	10	7	12	9	8	3	14	9	8	3	14	3	14	9	8	3	14	9	8	9	8	2	15	9	8	2	15
2	15	14	3	5	12	15	2	2	15	12	5	5	12	15	2	2	15	12	5	5	12	14	3	3	14	12	5
16	1	7	10	16	1	7	10	16	1	8	9	16	1	8	9	16	1	8	9	16	1	8	9	16	1	8	9
11	6	4	13	13	4	6	11	2	7	10	15	3	6	11	14	3	12	13	6	13	6	11	4	13	7	10	4
2	15	9	8	2	15	9	8	13	12	5	4	13	12	5	4	10	7	2	15	3	12	5	14	2	12	5	15
5	12	14	3	3	14	12	5	3	14	11	6	2	15	10	7	5	14	11	4	2	15	10	7	3	14	11	6
16	1	10	7	16	1	10	7	16	1	10	7	16	1	10	7	16	1	10	7	16	1	10	7	16	1	11	6
3	12	5	14	4	13	6	11	6	11	4	13	6	12	5	11	11	6	13	4	13	4	11	6	4	13	7	10
6	13	4	11	5	12	3	14	3	14	5	12	3	13	4	14	5	12	3	14	3	14	5	12	5	12	2	15
9	8	15	2	9	8	15	2	9	8	15	2	9	8	15	2	2	15	8	9	2	15	8	9	9	8	14	3
16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	11	6	16	1	12	5	16	1	12	5	16	1	12	5	16	1	12	5
7	10	4	13	10	7	13	4	13	4	10	7	2	11	6	15	7	4	13	10	7	11	6	10	9	4	13	8
2	15	5	12	5	12	2	15	2	15	5	12	7	14	3	10	9	14	3	8	2	14	3	15	7	14	3	10
9	8	14	3	3	14	8	9	3	14	8	9	9	8	13	4	2	15	6	11	9	8	13	4	2	15	6	11
16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	13	4	16	1	14	3	16	1	14	3	16	1	14	3
6	11	7	10	7	10	6	11	10	7	11	6	11	6	10	7	4	6	11	13	5	10	7	12	9	6	11	8
3	14	2	15	2	15	3	14	3	14	2	15	2	15	3	14	9	15	2	8	4	15	2	13	4	15	2	13
9	8	12	5	9	8	12	5	5	12	8	9	5	12	8	9	5	12	7	10	9	8	11	6	5	12	7	10
16	1	14	3	16	1	15	2																				
4	10	7	13	5	8	10	11																				
5	15	2	12	4	13	3	14																				
9	8	11	6	9	12	6	7																				

Subproblema 3

Para resolver este caso se incluye en el modelo como objetivo: min = x(2,2). Al explorar todas las posibles soluciones, nuevamente coinciden las mismas combinaciones para las cuales no existe solución al problema; es decir, las reflejadas en la Tabla 9; ahora con esas combinaciones en la segunda fila.

En la Tabla 12 se presentan cuáles son las combinaciones que aparecen como segunda columna en los cuadrados obtenidos.

En la Tabla 13 se presentan las 70 combinaciones para las que se obtiene solución. Para cada combinación se indica la cantidad de cuadrados diferentes en la que dicha combinación aparece en la segunda fila (F) y la cantidad en la que aparece en la segunda columna (C); así como la suma de ambas (S). Nuevamente, en todos los casos coinciden la cantidad de cuadrados de las combinaciones **a**-1-b-**c** y **c**-1-b-**a**.

En la Tabla 14 se presentan los 208 cuadrados supermágicos, siguiendo un orden ascendente entre los tres números que acompañan al 1.

Tabla 12: Combinaciones que aparecen en la 2ª columna, en cuadrados con un número menor en la 2ª fila.

No	Combinación				T	
1	11	**1**	6	16	1	14 **1** 15 4
2	16	**1**	6	11	1	4 **1** 15 14
3	12	**1**	6	15	4	3 **1** 16 14 - 14 **1** 16 3 - 4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4
4	15	**1**	6	12	4	3 **1** 16 14 - 14 **1** 16 3 - 4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4
5	10	**1**	7	16	2	15 **1** 14 4 - 15 **1** 12 6
6	16	**1**	7	10	2	4 **1** 14 15 - 6 **1** 12 15
7	12	**1**	7	14	4	4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6
8	14	**1**	7	12	4	4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6
9	9	**1**	8	16	5	4 **1** 14 15 - 4 **1** 15 14 - 14 **1** 15 4 - 15 **1** 14 4 - 7 **1** 12 14
10	16	**1**	8	9	5	4 **1** 14 15 - 4 **1** 15 14 - 14 **1** 15 4 - 15 **1** 14 4 - 14 **1** 12 7
11	10	**1**	8	15	10	3**1**16 14-14 **1**16 3-16**1**13 4-5 **1**12 16-5 **1**16 12-12**1**16 5-16**1**12 5-16**1**11 6-7 **1**12 14-7 **1**14 12
12	15	**1**	8	10	10	3**1**16 14-14 **1**16 3-4**1**13 16-5 **1**12 16-5 **1**16 12-12**1**16 5-16**1**12 5-6 **1**11 16-12**1**14 7-14 **1**12 7
13	11	**1**	8	14	6	16 **1** 13 4 - 6 **1** 12 15 - 6 **1** 15 12 - 7 **1** 10 16 - 16 **1** 10 7 - 16 **1** 10 7
14	14	**1**	8	11	6	4 **1** 13 16 - 12 **1** 15 6 - 15 **1** 12 6 - 7 **1** 10 16 - 7 **1** 10 16 - 16 **1** 10 7
15	12	**1**	8	13	11	2 **1** 16 15 - 15 **1** 16 2 - 16 **1** 15 2 - 3 **1** 14 16 - 16 **1** 14 3 -14 **1** 15 4 - 15 **1** 14 4 - 6 **1** 11 16 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6 - 7 **1** 10 16
16	13	**1**	8	12	11	2 **1** 15 16 - 2 **1** 16 15 -15 **1** 16 2 - 3 **1** 14 16 - 16 **1** 14 3 -4 **1** 14 15 - 4 **1** 15 14 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6 - 16 **1** 11 6 - 16 **1** 10 7
17	7	**1**	10	16	2	14 **1** 15 4 - 12 **1** 15 6
18	16	**1**	10	7	2	4 **1** 15 14 - 6 **1** 15 12
19	8	**1**	10	15	6	4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6 - 12 **1** 7 14 - 14 **1** 7 12
20	15	**1**	10	8	6	4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6 - 12 **1** 7 14 - 14 **1** 7 12
21	6	**1**	11	16	1	15 **1** 14 4
22	16	**1**	11	6	1	4 **1** 14 15
23	8	**1**	11	14	6	4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4 - 12 **1** 6 15 - 15 **1** 6 12 - 7 **1** 16 10 - 10 **1** 16 7
24	14	**1**	11	8	6	4 **1** 16 13 - 13 **1** 16 4 - 12 **1** 6 15 - 15 **1** 6 12 - 7 **1** 16 10 - 10 **1** 16 7
25	6	**1**	12	15	1	16 **1** 13 4
26	15	**1**	12	6	1	4 **1** 13 16
27	7	**1**	12	14	4	16 **1** 13 4 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6 - 16 **1** 6 11
28	14	**1**	12	7	4	4 **1** 13 16 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 6 16 - 11 **1** 16 6
29	8	**1**	12	13	6	3 **1** 14 16 - 16 **1** 14 3 - 14 **1** 15 4 - 15 **1** 14 4 - 11 **1** 6 16 - 10 **1** 7 16
30	13	**1**	12	8	6	3 **1** 14 16 - 16 **1** 14 3 - 4 **1** 14 15 - 4 **1** 15 14 - 16 **1** 6 11 - 16 **1** 7 10
31	8	**1**	13	12	6	15 **1** 4 14 - 14 **1** 4 15 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6 - 7 **1** 16 10 - 10 **1** 16 7
32	12	**1**	13	8	6	15 **1** 4 14 - 14 **1** 4 15 - 6 **1** 16 11 - 11 **1** 16 6 - 7 **1** 16 10 - 10 **1** 16 7
33	7	**1**	14	12	2	16 **1** 4 13 - 16 **1** 11 6
34	12	**1**	14	7	2	13 **1** 4 16 - 6 **1** 11 16
35	8	**1**	14	11	4	13 **1** 4 16 - 12 **1** 15 6 - 15 **1** 12 6 - 10 **1** 7 16
36	11	**1**	14	8	4	16 **1** 4 13 - 6 **1** 12 15 - 6 **1** 15 12 - 16 **1** 7 10
37	6	**1**	15	12	3	13 **1** 4 16 - 16 **1** 4 13 - 16 **1** 4 13
38	12	**1**	15	6	3	13 **1** 4 16 - 13 **1** 4 16 - 16 **1** 4 13
39	8	**1**	15	10	6	13 **1** 4 16 - 5 **1** 12 16 - 16 **1** 12 5 - 11 **1** 6 16 - 12 **1** 14 7 - 14 **1** 12 7
40	10	**1**	15	8	6	16 **1** 4 13 - 5 **1** 12 16 - 16 **1** 12 5 - 16 **1** 6 11 - 7 **1** 12 14 - 7 **1** 14 12
41	5	**1**	16	12	2	14 **1** 4 15 - 15 **1** 4 14
42	12	**1**	16	5	2	14 **1** 4 15 - 15 **1** 4 14
43	6	**1**	16	11	2	14 **1** 4 15 - 15 **1** 4 14
44	11	**1**	16	6	2	14 **1** 4 15 - 15 **1** 4 14
45	7	**1**	16	10	8	14 **1** 4 15 - 14 **1** 4 15 - 15 **1** 4 14 - 15 **1** 4 14 - 12 **1** 6 15 - 12 **1** 6 15 - 15 **1** 6 12 - 15 **1** 6 12
46	10	**1**	16	7	8	14 **1** 4 15 - 14 **1** 4 15 - 15 **1** 4 14 - 15 **1** 4 14 - 12 **1** 6 15 - 12 **1** 6 15 - 15 **1** 6 12 - 15 **1** 6 12
47	8	**1**	16	9	2	7 **1** 12 14 - 14 **1** 12 7
48	9	**1**	16	8	2	7 **1** 12 14 - 14 **1** 12 7

Tabla 13: Combinaciones de números para las que se obtiene solución al subproblema 3.

Combinación				F	C	S	Combinación				F	C	S	Combinación				F	C	S	Combinación				F	C	S
2	**1**	15	16	1	0	1	4	**1**	15	14	6	0	6	10	**1**	7	16	2	2	4	8	**1**	10	15	0	6	6
16	**1**	15	2	1	0	1	14	**1**	15	4	6	0	6	16	**1**	7	10	2	2	4	15	**1**	10	8	0	6	6
2	**1**	16	15	2	0	2	5	**1**	12	16	4	0	4	7	**1**	10	16	4	2	6	8	**1**	15	10	0	6	6
15	**1**	16	2	2	0	2	16	**1**	12	5	4	0	4	16	**1**	10	7	4	2	6	10	**1**	15	8	0	6	6
3	**1**	14	16	4	0	4	5	**1**	16	12	2	2	4	7	**1**	16	10	4	8	12	11	**1**	8	14	0	6	6
16	**1**	14	3	4	0	4	12	**1**	16	5	2	2	4	10	**1**	16	7	4	8	12	14	**1**	8	11	0	6	6
3	**1**	16	14	4	0	4	11	**1**	6	16	3	1	4	12	**1**	7	14	2	4	6	8	**1**	11	14	0	6	6
14	**1**	16	3	4	0	4	16	**1**	6	11	3	1	4	14	**1**	7	12	2	4	6	14	**1**	11	8	0	6	6
13	**1**	4	16	6	0	6	6	**1**	11	16	3	1	4	7	**1**	12	14	5	4	9	8	**1**	14	11	0	4	4
16	**1**	4	13	6	0	6	16	**1**	11	6	3	1	4	14	**1**	12	7	5	4	9	11	**1**	14	8	0	4	4
4	**1**	13	16	4	0	4	6	**1**	16	11	10	2	12	7	**1**	14	12	2	2	4	12	**1**	8	13	0	11	11
16	**1**	13	4	4	0	4	11	**1**	16	6	10	2	12	12	**1**	14	7	2	2	4	13	**1**	8	12	0	11	11
4	**1**	16	13	8	0	8	12	**1**	6	15	6	4	10	9	**1**	8	16	0	5	5	8	**1**	12	13	0	6	6
13	**1**	16	4	8	0	8	15	**1**	6	12	6	4	10	16	**1**	8	9	0	5	5	13	**1**	12	8	0	6	6
14	**1**	4	15	10	0	10	6	**1**	12	15	3	1	4	8	**1**	16	9	0	2	2	8	**1**	13	12	0	6	6
15	**1**	4	14	10	0	10	15	**1**	12	6	3	1	4	9	**1**	16	8	0	2	2	12	**1**	13	8	0	6	6
4	**1**	14	15	6	0	6	6	**1**	15	12	3	3	6	10	**1**	8	15	0	10	10	Total				208	208	
15	**1**	14	4	6	0	6	12	**1**	15	6	3	3	6	15	**1**	8	10	0	10	10							

Tabla 14: Cuadrados supermágicos con el 1 en la posición (2,2)

14	13	3	4	14	12	5	3	14	13	4	3	15	8	9	2	15	12	5	2	15	13	4	2	15	13	4	2
2	**1**	15	16	2	**1**	16	15	2	**1**	16	15	3	**1**	14	16	3	**1**	14	16	3	**1**	14	16	3	**1**	14	16
11	8	10	5	11	8	9	6	11	8	9	6	10	12	7	5	6	8	11	9	6	8	11	9	10	12	7	5
7	12	6	9	7	13	4	10	7	12	5	10	6	13	4	11	10	13	4	7	10	12	5	7	6	8	9	11
13	10	7	4	13	12	5	4	13	15	2	4	13	15	2	4	14	15	3	2	14	15	3	2	15	14	2	3
3	**1**	16	14	3	**1**	16	14	3	**1**	16	14	3	**1**	16	14	4	**1**	13	16	4	**1**	13	16	4	**1**	13	16
12	8	9	5	10	6	11	7	10	6	11	7	12	8	9	5	5	8	12	9	9	12	8	5	5	8	12	9
6	15	2	11	8	15	2	9	8	12	5	9	6	10	7	11	11	10	6	7	7	6	10	11	10	11	7	6
15	14	2	3	10	16	3	5	12	9	6	7	13	16	3	2	13	16	3	2	16	13	2	3	16	13	2	3
4	**1**	13	16	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15	4	**1**	14	15
9	12	8	5	13	8	11	2	13	8	11	2	6	7	12	9	10	11	8	5	5	8	11	10	9	12	7	6
6	7	11	10	7	9	6	12	5	16	3	10	11	10	5	8	7	6	9	12	9	12	7	6	5	8	11	10
11	16	2	5	12	9	7	6	13	16	2	3	13	16	2	3	16	13	3	2	16	13	3	2	14	8	9	3
4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	15	14	4	**1**	16	13
13	8	10	3	13	8	10	3	7	6	12	9	11	10	8	5	5	8	10	11	9	12	6	7	11	10	7	6
6	9	7	12	5	16	2	11	10	11	5	8	6	7	9	12	9	12	6	7	5	8	10	11	5	15	2	12
14	12	5	3	14	15	2	3	14	15	2	3	15	8	9	2	15	12	5	2	15	14	3	2	15	14	3	2
4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13	4	**1**	16	13
7	6	11	10	7	6	11	10	11	10	7	6	10	11	6	7	6	7	10	11	6	7	10	11	10	11	6	7
9	15	2	8	9	12	5	8	5	8	9	12	5	14	3	12	9	14	3	8	9	12	5	8	5	8	9	12
14	8	9	3	14	10	7	3	14	10	7	3	14	15	2	3	11	10	7	6	11	15	2	6	12	15	5	2
5	**1**	12	16	5	**1**	12	16	5	**1**	12	16	5	**1**	12	16	5	**1**	16	12	5	**1**	16	12	6	**1**	11	16
11	15	6	2	4	8	13	9	11	15	6	2	4	8	13	9	14	8	9	3	14	8	9	3	3	8	14	9
4	10	7	13	11	15	2	6	4	8	9	13	11	10	7	6	4	15	2	13	4	10	7	13	13	10	4	7
15	12	2	5	15	12	2	5	10	12	5	7	10	13	4	7	12	8	9	5	12	15	2	5	15	7	10	2
6	**1**	11	16	6	**1**	11	16	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11	6	**1**	16	11
3	8	14	9	9	14	8	3	15	8	9	2	15	8	9	2	13	10	7	4	13	10	7	4	9	12	5	8
10	13	7	4	4	7	13	10	3	13	4	14	3	12	5	14	3	15	2	14	3	8	9	14	4	14	3	13

Tabla 14 (Continuación).

15	8	9	2	15	12	5	2	15	12	5	2	15	14	3	2	15	14	3	2	11	16	5	2	16	11	2	5
6	1	16	11	6	1	16	11	6	1	16	11	6	1	16	11	6	1	16	11	6	1	12	15	6	1	12	15
10	13	4	7	4	7	10	13	10	13	4	7	4	7	10	13	9	12	5	8	4	7	14	9	3	8	13	10
3	12	5	14	9	14	3	8	3	8	9	14	9	12	5	8	4	7	10	13	13	10	3	8	9	14	7	4
16	11	2	5	11	16	2	5	16	11	5	2	16	11	5	2	12	14	5	3	13	11	6	4	13	14	3	4
6	1	12	15	6	1	15	12	6	1	15	12	6	1	15	12	7	1	10	16	7	1	10	16	7	1	10	16
9	14	7	4	13	10	8	3	3	8	10	13	9	14	4	7	2	8	15	9	2	8	15	9	2	8	15	9
3	8	13	10	4	7	9	14	9	14	4	7	3	8	10	13	13	11	4	6	12	14	3	5	12	11	6	5
14	12	3	5	13	8	11	2	15	9	6	4	15	9	6	4	16	10	3	5	16	10	3	5	16	10	5	3
7	1	10	16	7	1	12	14	7	1	12	14	7	1	12	14	7	1	12	14	7	1	12	14	7	1	14	12
2	8	15	9	10	16	5	3	2	8	13	11	10	16	5	3	2	8	13	11	9	15	6	4	2	8	11	13
11	13	6	4	4	9	6	15	10	16	3	5	2	8	11	13	9	15	6	4	2	8	13	11	9	15	4	6
16	10	5	3	12	8	9	5	12	14	3	5	14	8	9	3	14	12	5	3	15	8	2	9	15	8	2	9
7	1	14	12	7	1	16	10	7	1	16	10	7	1	16	10	7	1	16	10	10	1	7	16	10	1	7	16
9	15	4	6	13	11	6	4	13	11	6	4	11	13	4	6	11	13	4	6	3	12	14	5	5	14	12	3
2	8	11	13	2	14	3	15	2	8	9	15	2	12	5	15	2	8	9	15	6	13	11	4	4	11	13	6
15	8	9	2	15	8	9	2	15	12	5	2	15	14	3	2	8	14	9	3	14	8	3	9	14	8	3	9
10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	10	1	16	7	11	1	6	16	11	1	6	16	11	1	6	16
4	11	6	13	6	13	4	11	6	13	4	11	4	11	6	13	2	12	15	5	2	12	15	5	5	15	12	2
5	14	3	12	3	12	5	14	3	8	9	14	5	8	9	12	13	7	4	10	7	13	10	4	4	10	13	7
8	12	5	9	8	14	3	9	13	7	10	4	13	14	3	4	14	8	9	3	14	8	9	3	14	12	5	3
11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6
13	7	10	4	13	7	10	4	8	12	5	9	8	12	5	9	4	10	7	13	7	13	4	10	2	8	9	15
2	14	3	15	2	12	5	15	2	14	3	15	2	7	10	15	5	15	2	12	2	12	5	15	7	13	4	10
14	12	5	3	14	13	4	3	14	15	2	3	7	14	9	4	8	10	13	3	9	7	14	4	13	8	3	10
11	1	16	6	11	1	16	6	11	1	16	6	12	1	6	15	12	1	6	15	12	1	6	15	12	1	6	15
7	13	4	10	2	8	9	15	4	10	7	13	2	11	16	5	5	16	11	2	5	16	11	2	2	11	16	5
2	8	9	15	7	12	5	10	5	8	9	12	13	8	3	10	9	7	4	14	8	10	3	13	7	14	9	4
13	10	3	8	14	7	4	9	6	15	9	4	13	8	2	11	6	15	4	9	13	8	11	2	7	14	4	9
12	1	6	15	12	1	6	15	12	1	7	14	12	1	7	14	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	15	6
5	16	11	2	5	16	11	2	3	10	16	5	3	10	16	5	13	8	11	2	6	15	4	9	13	8	10	3
4	7	14	9	3	10	13	8	13	8	2	11	6	15	9	4	3	10	5	16	3	10	5	16	2	11	5	16
13	8	10	3	14	7	9	4	13	10	7	4	13	15	2	4	8	12	9	5	8	12	9	5	10	6	11	7
12	1	15	6	12	1	15	6	12	1	16	5	12	1	16	5	13	1	4	16	13	1	4	16	13	1	4	16
7	14	4	9	3	10	8	13	3	8	9	14	3	8	9	14	2	14	15	3	3	15	14	2	3	15	14	2
2	11	5	16	5	16	2	11	6	15	2	11	6	10	7	11	11	7	6	10	10	6	7	11	8	12	5	9
10	12	5	7	12	8	5	9	12	8	5	9	8	12	5	9	8	12	5	9	8	14	3	9	8	15	2	9
13	1	4	16	13	1	4	16	13	1	4	16	13	1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4
3	15	14	2	2	14	15	3	3	15	14	2	10	6	11	7	11	7	10	6	11	7	10	6	10	6	11	7
8	6	11	9	7	11	10	6	6	10	11	7	3	15	2	14	2	14	3	15	2	12	5	15	3	12	5	14
12	8	9	5	12	8	9	5	12	14	3	5	12	15	2	5	7	12	9	6	8	10	11	5	8	11	10	5
13	1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4	13	1	16	4	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15
6	10	7	11	7	11	6	10	7	11	6	10	6	10	7	11	2	13	16	3	3	16	13	2	3	16	13	2
3	15	2	14	2	14	3	15	2	8	9	15	3	8	9	14	11	8	5	10	9	7	6	12	9	6	7	12
9	7	12	6	9	12	7	6	11	5	10	8	11	8	5	10	11	10	5	8	12	6	7	9	12	7	6	9
14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15	14	1	4	15
3	16	13	2	3	16	13	2	3	16	13	2	2	13	16	3	3	16	13	2	3	16	13	2	3	16	13	2
8	10	5	11	8	5	10	11	6	12	7	9	7	12	9	6	6	7	12	9	5	11	10	8	5	10	11	8

Tabla 14 (Continuación).

4	15	9	6	11	8	2	13	4	15	6	9	5	16	3	10	11	8	13	2	13	8	11	2	15	9	6	4
14	**1**	7	12	14	**1**	7	12	14	**1**	12	7	14	**1**	12	7	14	**1**	12	7	14	**1**	12	7	14	**1**	12	7
5	10	16	3	5	10	16	3	11	8	13	2	11	8	13	2	4	15	6	9	3	16	5	10	3	16	5	10
11	8	2	13	4	15	9	6	5	10	3	16	4	9	6	15	5	10	3	16	4	9	6	15	2	8	11	13
7	12	6	9	8	11	5	10	11	8	10	5	11	16	2	5	12	7	9	6	12	9	7	6	9	12	5	8
14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	15	4	14	**1**	16	3
11	8	10	5	9	6	12	7	7	12	6	9	3	8	10	13	5	10	8	11	3	8	10	13	7	6	11	10
2	13	3	16	3	16	2	13	2	13	3	16	6	9	7	12	3	16	2	13	5	16	2	11	4	15	2	13
9	15	2	8	11	10	7	6	11	15	2	6	6	12	9	7	8	10	11	5	8	11	10	5	9	7	12	6
14	**1**	16	3	14	**1**	16	3	14	**1**	16	3	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14
7	6	11	10	5	8	9	12	5	8	9	12	3	13	16	2	2	16	13	3	2	16	13	3	2	16	13	3
4	12	5	13	4	15	2	13	4	10	7	13	10	8	5	11	9	7	6	12	9	6	7	12	8	10	5	11
9	12	7	6	10	8	5	11	11	5	10	8	11	10	5	8	12	6	7	9	12	7	6	9	4	14	9	7
15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	4	14	15	**1**	6	12
2	16	13	3	3	13	16	2	2	16	13	3	2	16	13	3	2	16	13	3	2	16	13	3	5	11	16	2
8	5	10	11	6	12	9	7	6	12	7	9	6	7	12	9	5	11	10	8	5	10	11	8	10	8	3	13
8	10	13	3	9	7	14	4	10	8	3	13	13	10	3	8	14	7	4	9	4	14	7	9	8	10	3	13
15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	6	12	15	**1**	12	6	15	**1**	12	6
2	16	11	5	2	16	11	5	5	11	16	2	2	16	11	5	2	16	11	5	10	8	13	3	9	7	14	4
9	7	4	14	8	10	3	13	4	14	9	7	4	7	14	9	3	10	13	8	5	11	2	16	2	16	5	11
10	8	13	3	6	12	7	9	8	10	5	11	10	8	11	5	10	16	3	5	12	6	9	7	12	9	6	7
15	**1**	12	6	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4	15	**1**	14	4
4	14	7	9	10	8	11	5	9	7	12	6	6	12	7	9	2	8	11	13	5	11	8	10	2	8	11	13
5	11	2	16	3	13	2	16	2	16	3	13	3	13	2	16	7	9	6	12	2	16	3	13	5	16	3	10
10	12	5	7	10	13	4	7	6	11	10	7	7	10	11	6	9	6	11	8	9	12	5	8	10	7	6	11
15	**1**	16	2	15	**1**	16	2	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13	16	**1**	4	13
6	8	9	11	6	8	9	11	3	14	15	2	2	15	14	3	2	15	14	3	2	15	14	3	3	14	15	2
3	13	4	14	3	12	5	14	9	8	5	12	9	8	5	12	7	12	5	10	7	6	11	10	5	12	9	8
11	6	7	10	4	13	10	7	7	10	13	4	10	7	4	13	4	13	11	6	6	11	13	4	4	13	6	11
16	**1**	4	13	16	**1**	6	11	16	**1**	6	11	16	**1**	6	11	16	**1**	7	10	16	**1**	7	10	16	**1**	10	7
2	15	14	3	5	12	15	2	2	15	12	5	5	12	15	2	5	12	14	3	3	14	12	5	9	8	15	2
5	12	9	8	9	8	3	14	9	8	3	14	3	14	9	8	9	8	2	15	9	8	2	15	5	12	3	14
5	11	6	12	5	14	3	12	6	11	4	13	4	13	7	10	7	10	4	13	10	7	13	4	6	10	7	11
16	**1**	10	7	16	**1**	10	7	16	**1**	10	7	16	**1**	11	6	16	**1**	11	6	16	**1**	11	6	16	**1**	12	5
9	8	15	2	9	8	15	2	9	8	15	2	9	8	14	3	9	8	14	3	3	14	8	9	9	8	13	4
4	14	3	13	4	11	6	13	3	14	5	12	5	12	2	15	2	15	5	12	5	12	2	15	3	15	2	14
6	15	2	11	13	8	9	4	13	10	7	4	6	11	7	10	7	10	6	11	10	7	11	6	11	6	10	7
16	**1**	12	5	16	**1**	12	5	16	**1**	12	5	16	**1**	13	4	16	**1**	13	4	16	**1**	13	4	16	**1**	13	4
9	8	13	4	2	15	6	11	2	15	6	11	9	8	12	5	9	8	12	5	5	12	8	9	5	12	8	9
3	10	7	14	3	10	7	14	3	8	9	14	3	14	2	15	2	15	3	14	3	14	2	15	2	15	3	14
7	12	5	10	7	13	4	10	11	8	9	6	11	13	4	6	9	12	6	7								
16	**1**	14	3	16	**1**	14	3	16	**1**	14	3	16	**1**	14	3	16	**1**	15	2								
9	8	11	6	9	8	11	6	5	12	7	10	5	12	7	10	5	8	10	11								
2	13	4	15	2	12	5	15	2	13	4	15	2	8	9	15	4	13	3	14								

A partir de los tres subproblemas descritos, se identificaron los 880 cuadrados supermágicos asimétricos de tamaño cuatro; en los que el número mágico (34) se obtiene en 14 submatrices, de cuatro elementos cada una. De ellos, 208 tienen el 1 en la posición (1,1), 464 tienen el 1 en la posición (1,2) y 208 en la posición (2,2). Como de cada uno de los 880 cuadrados diferentes presentados se pueden obtener otros siete, aplicando diferentes simetrías y rotaciones, se tienen 7040 cuadrados supermágicos de tamaño cuatro.

De las 114 formas posibles de ordenar los números del 2 al 16 para que acompañen al 1 en cualquiera de las filas, en cada uno de los tres grupos tratados hay 44 combinaciones para las que no se obtiene un cuadrado mágico. En los tres casos, hay coincidencia en los números que intervienen en las combinaciones fallidas y resulta interesante que no haya solución para ninguna combinación formada solo por números impares.

Dentro de cada uno de los grupos, en las 70 combinaciones para las que existen los cuadrados supermágicos, coincide la cantidad de cuadrados que se obtiene con una combinación cualquiera y la obtenida al mantener en su posición el número simétrico al 1 con respecto al centro del cuadrado e intercambiar los otros dos. Esto ocurre tanto para el caso en que las combinaciones aparecen en una fila como cuando están en una columna.

Estos resultados pueden tener múltiples aplicaciones en diversos campos del conocimiento científico. En particular, los cuadrados mágicos son ampliamente utilizados en la criptografía. Por ejemplo, en Hussein & Mehdi (2020), se presenta un algoritmo para la encriptación de imágenes que usa un sistema difuso basado en los cuadrados mágicos. Xie *et al*. (2019), crean una matriz mágica cuadrada extendida, que se utiliza como componente fundamental de la tecnología diseñada para transmitir los datos confidenciales de forma segura. En Ranjani (2017), se utiliza un esquema de ocultamiento de información basado en cuadrados seudo mágicos que son generados a partir de un parámetro oculto en la información. Zhong & Fang (2016), proponen un método de encriptación en el que consideran los atributos cambiantes de los pixeles, de acuerdo con operaciones realizadas con cuadrados mágicos. En la mayoría de estas aplicaciones se utilizan cuadrados mágicos de tamaño cuatro.

El modelo de optimización presentado se puede generalizar fácilmente para cuadrados de mayor tamaño; pero, como se puede observar en la Figura 8, para n = 5 el tiempo de ejecución se incrementa considerablemente con respecto a los obtenidos para n = 4 (ver Figuras 2 – 7).

En la Figura 9 se presentan 25 soluciones para n = 5; cada una con el 1 en una casilla diferente. En este caso no se consideran restricciones adicionales a las de suma por filas, columnas y diagonales. Se puede comprobar que los cuadrados obtenidos son asimétricos entre sí.

Fig. 8: Reporte de LINGO con datos generales sobre el modelo resuelto para n = 5.

1	20	11	23	10	3	1	20	24	17	20	24	1	14	6	9	16	24	1	15	21	2	18	23	1
22	12	9	6	16	7	25	23	6	4	21	3	2	17	22	25	12	5	20	3	20	5	6	12	22
15	2	17	18	13	15	13	11	18	8	4	23	19	10	9	6	14	18	19	8	3	25	11	7	19
19	24	3	14	5	19	10	2	12	22	5	8	25	11	16	23	10	11	4	17	4	24	16	13	8
8	7	25	4	21	21	16	9	5	14	15	7	18	13	12	2	13	7	21	22	17	9	14	10	15
13	22	3	4	23	4	21	9	20	11	17	16	6	21	5	10	24	16	13	2	9	4	17	16	19
1	24	25	7	8	18	1	25	2	19	24	11	1	7	22	25	8	9	1	22	25	2	22	15	1
16	2	9	21	17	17	5	22	13	8	2	3	25	23	12	4	3	23	20	15	14	23	13	8	7
15	6	18	14	12	10	14	6	23	12	9	15	19	4	18	5	18	6	17	19	11	12	3	21	18
20	11	10	19	5	16	24	3	7	15	13	20	14	10	8	21	12	11	14	7	6	24	10	5	20
20	15	8	18	4	15	19	3	24	4	12	9	15	4	25	21	2	10	25	7	8	23	7	11	16
9	5	22	23	6	9	23	10	6	17	8	21	18	13	5	8	12	23	6	16	15	3	20	6	21
1	25	17	3	19	13	1	14	12	25	16	22	1	24	2	4	22	18	1	20	13	18	24	9	1
21	7	2	11	24	7	20	22	5	11	6	3	20	17	19	13	15	11	9	17	12	2	4	25	22
14	13	16	10	12	21	2	16	18	8	23	10	11	7	14	19	14	3	24	5	17	19	10	14	5
18	19	7	9	12	17	25	6	9	8	12	11	9	25	8	17	3	4	16	25	12	5	21	24	3
10	5	25	14	11	2	7	13	23	20	22	4	21	5	13	20	18	14	5	8	10	11	4	18	22
20	22	6	4	13	4	21	15	3	22	15	23	18	2	7	15	12	10	21	7	16	9	13	2	25
1	17	24	15	8	24	1	19	16	5	6	24	1	14	20	11	23	24	1	6	19	23	7	15	1
16	2	3	23	21	18	11	12	14	10	10	3	16	19	17	2	9	13	22	19	8	17	20	6	14
25	4	8	7	21	8	2	23	7	25	11	7	3	23	21	21	12	3	23	6	24	21	5	13	2
10	12	13	24	6	17	22	9	5	12	25	13	20	5	2	25	4	9	19	8	3	4	20	16	22
20	18	2	3	22	13	19	3	24	6	4	19	17	9	16	2	18	13	17	15	6	7	19	8	25
9	17	19	15	5	16	21	10	14	4	15	12	24	6	8	10	20	16	5	14	14	10	9	17	15
1	14	23	16	11	11	1	20	15	18	10	14	1	22	18	7	11	24	1	22	18	23	12	11	1

Fig. 9: Cuadrados mágicos de tamaño cinco.

CONCLUSIONES

Se modela el problema de la búsqueda de los cuadrados mágicos de tamaño cuatro a partir de un Modelo de Programación Lineal en Enteros. Se demuestra que los 880 cuadrados mágicos de tamaño cuatro asimétricos que existen pueden ser clasificados como supermágicos, porque cumplen con otras cuatro restricciones además de las sumas por filas, columnas y diagonales: la suma de los números de las esquinas, los cuatro números centrales, los dos números centrales de las filas primera y última y los dos números centrales de las columnas primera y última.

La forma en que han sido ordenados los cuadrados supermágicos en este trabajo facilita que puedan ser localizados, a partir de características específicas; siempre que estas se refieran a la posición del 1 en el cuadrado. De forma análoga, quedan ordenadas las diferentes combinaciones del 1 para las que no existen cuadrados mágicos de orden cuatro.

El modelo de optimización presentado puede ser extendido para cuadrados de mayor dimensión; aunque el tiempo de ejecución para n $\geq$ 6 puede ser tan grande que dificulte, en la práctica, obtener una solución.

REFERENCIAS

Berlekamp, E.R., Conway, J.H. & Guy, R.K. (1982). *Winning Ways for Your Mathematical Plays.* Vol. 2, pp. 778-783. Games in Particular. London: Academic Press.

Croy, S., Hansen, J. & McQuillan, J. (2016); *Calculating the Number of Order-6 Magic Squares with Modular Lifting*. Proceedings of the Ninth Annual Symposium on Combinatorial Search (pp. 129–130), Tarrytown, NY, USA.

Esquerra, P. (2009). La magia de los cuadrados mágicos [versión electrónica]. *Sigma: Revista de Matemáticas, 34*, 107-128.

Fonseca, E. & Grandchamp, E. (2012). *Heuristic Method to Find Magic Squares*. Proceedings of the 15th International Conference on Computational Science and Engineering (pp. 119–123), Paphos, Cyprus.

Hillier, F.S. & Lieberman, G.J. (2010). *Introduction to Operations Research*. 9th ed. New York: McGraw-Hill.

Hussein, R. & Mehdi, S. (2020). A New Algorithm Based on Magic Square and a Novel Chaotic System for Image Encryption. *Journal of Intelligent Systems, 29* (1), 1202–1215. https://doi.org/10.1515/jisys-2018-0404

Kim, Y. & Yoo, J. (2008, febrero 20). An algorithm for constructing magic squares. *Discrete Applied Mathematics 156* (14), 2804–2809. https://doi.org/10.1016/j.dam.2007.09.029

LINGO (2018). *The Modeling Language and Optimizer*. LINDO Systems Inc. Bajado marzo 20, 2020, desde http://www.lindo.com

Ranjani, J. (2017). Data hiding using pseudo magic squares for embedding high payload in digital images. *Multimedia Tools and Applications, 76*, 3715–3729. https://doi.org/10.1007/s11042-016-3974-1

Stephens, D. (1993). *Matrix properties of magic squares*, Master of Science Thesis, College of Arts and Sciences, Texas Woman's University, Texas.

Velázquez, L. (2004). *A simple vector space to characterize magic squares*. Proceedings of the XXXVII National Congress of the Mexican Mathematics Society. UABC, Baja California, México.

Xie, X-Z., Liu, Y. & Chang, C. (2019). Extended squared magic matrix for embedding secret information with large payload. *Multimedia Tools and Applications, 78*, 19045–19059. https://doi.org/10.1007/s11042-019-7252-x

Zhong, W., Deng, Y. & Fang, K-T. (2016). *Image encryption by using magic squares*. Proceedings of the 9th International Congress on Image and Signal Processing, BioMedical Engineering and Informatics (CISP-BMEI) (pp. 771-775), Datong, China.